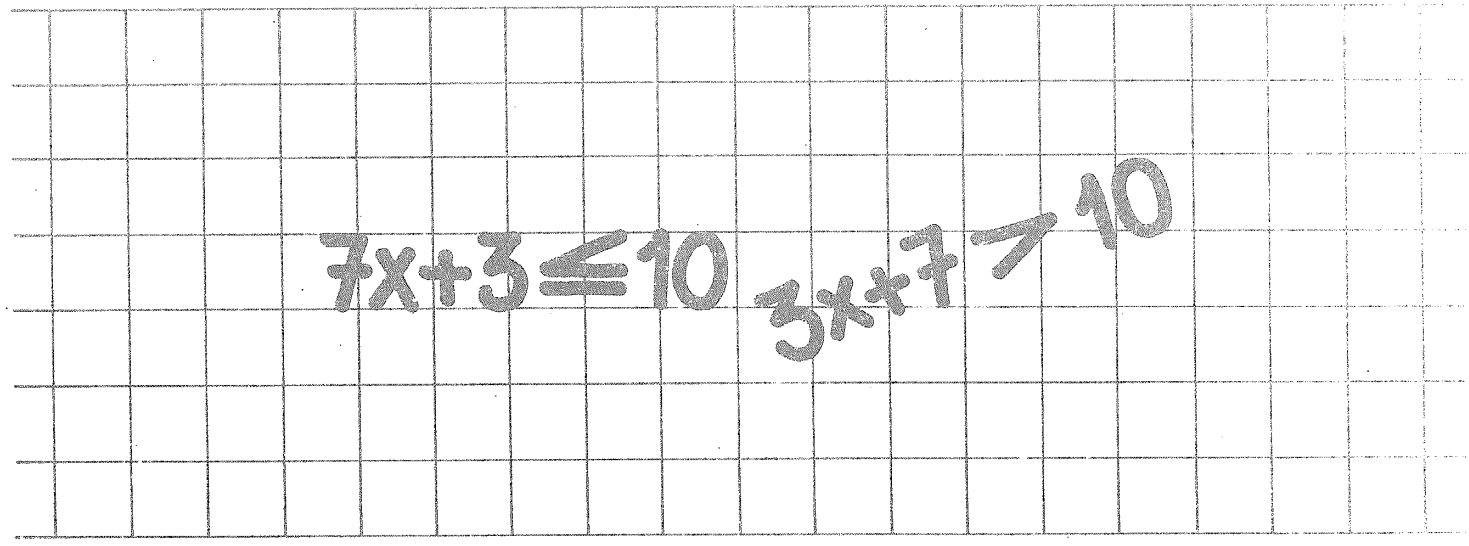
DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. ***Desigualdades de primer grado***
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 4

DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1518-7

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, mas sobrantes de reposición

CO ET KC 100

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

4.1 La desigualdad como modelo matemático 9

4.2 Conjunto solución de una desigualdad de primer grado con una indeterminada 21

4.3 Conjunto solución como un intervalo 50

4.4 Operaciones con intervalos 68

4.5 Solución de desigualdades polinomias 89

4.6 Solución de desigualdades con expresiones racionales 108

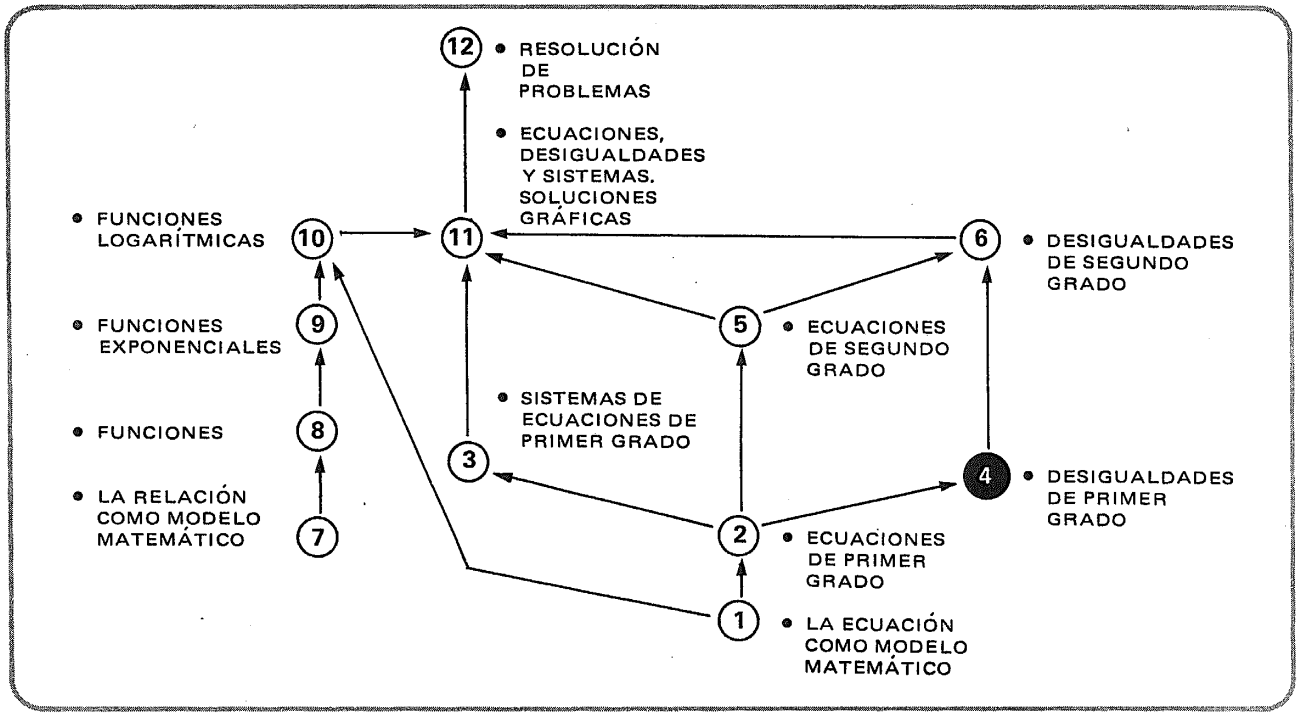
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 4. Desigualdades de primer grado

Objetivos: resolver desigualdades de primer grado con una incógnita

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Resolución de ecuaciones de primer grado	2	2

4.1

La desigualdad como modelo matemático

1

Analicemos detenidamente el siguiente planteamiento:

1. Deseamos producir un cierto artículo de consumo general.
2. Hemos determinado que el costo de los materiales utilizados en cada unidad es de 12 pesos.
3. También hemos encontrado que el número suficiente de trabajadores para la producción es 5.
4. El sueldo de los trabajadores será de 200 pesos por jornada de 8 horas.
5. Se pretende trabajar 5 días a la semana.
6. Habrá que pagarles a los trabajadores, los 7 días de la semana, de acuerdo con la ley.
7. Se otorgará a los trabajadores prestaciones estimadas en un 20% del sueldo recibido.
8. Los gastos de energía eléctrica, teléfono, renta de local, etc., se calculan en 400 pesos semanales.
9. Por cada unidad vendida se pagará al fisco una cantidad calculada en 2.50 pesos.
10. El rendimiento máximo calculado es de 250 unidades por trabajador por semana de 40 horas.
11. El precio de venta máximo al distribuidor es de 60 pesos.
12. Necesitamos determinar: el rango de producción con utilidad, o sea, el número de unidades que es necesario producir para tener utilidad, así como nuestra utilidad máxima semanal.

2

Intentemos
construir un

modelo matemático

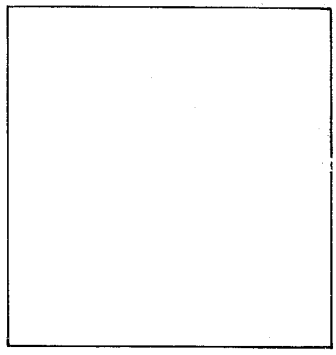
de la
situación.

3

Para empezar, nos preguntamos

¿cuáles son las incógnitas ?

Léase cuidadosamente
el enunciado, antes de responder.



Del párrafo 12:

1. El número de unidades que es necesario producir para obtener utilidad.
2. Utilidad máxima semanal.

4

Seleccionamos **símbolos**
para las incógnitas:

x — número de unidades que
es necesario producir
por semana para obtener utilidad.
obtener utilidad.

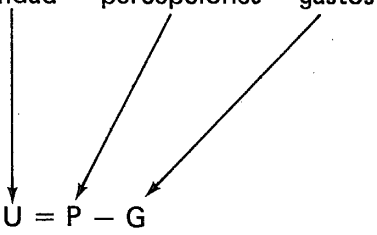
$U_{máx}$ — utilidad máxima semanal.

5

Establezcamos un **modelo general** de la situación.

- utilidad = percepciones − gastos

Representado simbólicamente:



- $U = P - G$

6

Como se requiere **operar con utilidad:**

- $U = P - G > 0$

Si $U = P - G < 0$ operamos con pérdida

Si $U = P - G = 0$ operamos sin pérdida ni utilidad

7

- $U = P - G > 0$

Especifiquemos
P
o sea, el monto de las percepciones semanales.

$P =$ _____

Léase cuidadosamente el enunciado, antes de responder.

Del párrafo 11:

1. Precio de venta al distribuidor: 60
2. Cantidad de unidades producidas por semana: x
3. Importe de la venta, **suponiendo que es posible vender todas las unidades producidas** en una semana: 60x

8

- $U = P - G > 0$

$P = 60x$

Especifiquemos, ahora, G,
o importe de los gastos semanales.
Para ello,
empecemos por **enumerarlos:**

1. ⌊_____⌋
2. ⌊_____⌋
3. ⌊_____⌋

⋮

Léase cuidadosamente el enunciado, antes de responder.

Párrafo 2:
1. Materiales
Párrafos del 3 al 7:
2. Mano de obra
Párrafo 8:
3. Gastos varios (renta, energía eléctrica, etc.)
Párrafo 9:
4. Obligaciones fiscales

9

- $U = P - G > 0$

$P = 60x$

	Representación simbólica:
Gastos de materiales	m
Gastos de mano de obra	o
Gastos varios	v
Gastos fiscales	f

10

- $U = P - G > 0$

$P = 60x$

$G = m + o + v + f$

Gastos de materiales (párrafo 2):

$m =$ ⌊_____⌋

1. Importe en pesos de los materiales utilizados, por unidad: 12

2. Importe semanal por concepto de gastos de material:
$m = 12x$

11

- $U = P - G > 0$

$P = 60x$

$G = 12x + o + v + f$

Gastos de mano de obra (párrafos 3, 4, 5, 6, 7):

$o =$ ⌊_____⌋

1. Número de trabajadores: 5
2. Sueldo diario: 200
3. Días pagados por semana: 7
4. Prestaciones: 20% del sueldo
5. Importe semanal de sueldos:
   $5 \times 200 \times 7 = 7000$
6. Prestaciones:
   $.20 \times 7000 = 1400$

$o = 8400$

12

- $U = P - G > 0$

$P = 60x$

$G = 12x + 8400 + v + f$

Gastos varios (párrafo 8):

$v =$ ⌊_____⌋

$v = 400$

13

- $U = P - G > 0$

$P = 60x$

$G = 12x + 8400 + 400 + f$

Gastos fiscales (párrafo 9):

$f =$ ⌊_____⌋

$f = 2.50x$

14

- $U = P - G > 0$

  $P = 60x$

  $G = 12x + 8400 + 400 + 2.50x$

Sustituyamos las expresiones para P y G en el modelo general:

Respuesta en el cuadro siguiente

- $U = P - G > 0$

  $U = P - G = 60x - (12x + 8400 + 400 + 2.50x) > 0$

En forma más compacta:

$$60x - (14.50x + 8800) > 0 \qquad x \in \mathbb{N}$$

15

Por otra parte, el número máximo de unidades que somos capaces de producir por semana es (párrafos 3 y 10):

$250 \times 5 = 1250$

16

Modelos de la situación.

1. Rango de operación con utilidad:

   - $60x - (14.50x + 8800) > 0$

     $x \in \mathbb{N}$ • $x \leqslant 1250$

2. Monto de la utilidad:

   - $U = 60x - (14.50x + 8800)$

17

Por el momento,
concentremos
nuestra atención en

- $60x - (14.50x + 8800) > 0$

  $x \in \mathbb{N}$ • $x \leqslant 1250$

18

- $60x - (14.50x + 8800) > 0$

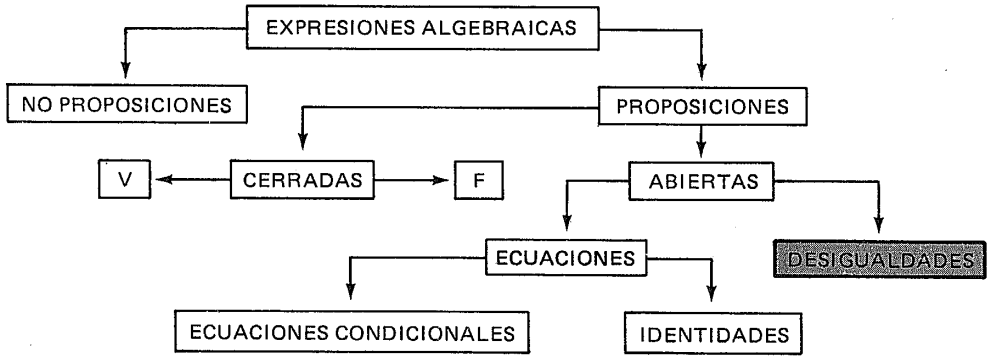
  $x \in \mathbb{N}$ • $x \leqslant 1250$

Cada una de las dos expresiones
que constituyen este modelo
es una
proposición abierta de desigualdad
o simplemente

desigualdad.

19

Ubiquemos esta clase de expresiones algebraicas en nuestro esquema general.



20

Decimos que una expresión como ésta

$$60x - (14.50x + 8800) > 0 \qquad x \in \mathbb{N}$$

es una

desigualdad de primer grado

con una indeterminada, variable o incógnita.

21

Práctica
de
formación de

desigualdades de primer grado

con
una indeterminada.

22

Un número no determinado
es mayor que 5:

└_____┘

Por ejemplo:

$x > 5$

23

El doble de un cierto número
es menor que cero:

└_____┘

$2x < 0$

24

El triple de un número
incrementado en siete,
es igual o menor que 10:

└_____┘

Atención.

De acuerdo con nuestro convenio:

$\underbrace{3x + 7}_{\text{el triple de un número incrementado en 7}} \leqslant 10$

$\underbrace{3(x + 7)}_{\text{el triple de: un número incrementado en 7.}} \leqslant 10$

25

La mitad de un número
disminuida en 5
es mayor o igual a 12.

$\frac{x}{2} - 5 \geqslant 12$

26

La mitad de:
un número
aumentado en 2, es
mayor que el mismo número
disminuido en 1.

$\frac{x+2}{2} > x - 1$

27

La suma de un número
y la mitad de sí mismo
es mayor o igual que el mismo
número restado de 14.

$x + \frac{x}{2} \geqslant 14 - x$

28

Siete más cinco veces
un cierto número
es menor o igual al
número disminuido en 1.

$7 + 5x \leqslant x - 1$

29

Ocho
más el triple de:
un número
incrementado en 2
es mayor que
el número incrementado en 18.

$8 + 3(x + 2) > x + 18$

30

Seis veces:
la suma de 2 y un cierto número,
es menor que
el doble de:
el triple del número,
disminuido en 6.

$6(2 + x) < 2(3x - 6)$

2.4.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.4.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* una desigualdad de primer grado con una indeterminada, como el modelo matemático de una situación real;

- *formar*, a partir de un enunciado dado, una desigualdad de primer grado con una indeterminada.

4.2

Conjunto solución de una desigualdad de primer grado con una indeterminada

31

Consideremos la desigualdad

$$3x + 7 > 10 \qquad x \in \mathbb{N}$$

El número $x = 0$
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

└──────────┘

- No
- $0 \in \mathbb{N}$

pero:

$3(0) + 7 > 10$
$0 + 7 > 10$
$7 > 10$
▲
PCF

(proposición cerrada falsa)

32

$$3x + 7 > 10 \qquad x \in \mathbb{N}$$

El número $x = 1$
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

└──────────┘

- No
- $1 \in \mathbb{N}$

pero:

$3(1) + 7 > 10$
$3 + 7 > 10$
$10 > 10$
▲
PCF

33

$3x + 7 > 10$
$x \in \mathbb{N}$

El número $x = 2$
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- Sí
- $2 \in \mathbb{N}$
  y
  $3(2) + 7 > 10$
  $6 + 7 > 10$
  $13 > 10$
  ▲
  PCV

34

$3x + 7 > 10$
$x \in \mathbb{N}$

El número $x = 3$
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- Sí
- $3 \in \mathbb{N}$
  y
  $3(3) + 7 > 10$
  $9 + 7 > 10$
  $16 > 10$
  ▲
  PCV

35

$3x + 7 > 10$
$x \in \mathbb{N}$

El número $x = 4$
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- Sí
- $4 \in \mathbb{N}$
  y
  $3(4) + 7 > 10$
  $12 + 7 > 10$
  $19 > 10$
  ▲
  PCV

36

$$3x + 7 > 10 \qquad x \in \mathbb{N}$$

El número x = 100
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

[_____]

- Sí
- $100 \in \mathbb{N}$
  y
  $3(100) + 7 > 10$
  $300 + 7 > 10$
  $307 > 10$
  ▲
  PCV

37

Atención.

Observamos que

todos los números naturales mayores que 1

satisfacen la desigualdad

$$3x + 7 > 10 \qquad x \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, su conjunto solución tiene [_____] elementos.
¿cuántos?

un número infinito de

38

$$3x + 7 > 10 \qquad x \in \mathbb{N}$$

Conjunto solución:

$$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x > 1\}$$

39

Consideremos la desigualdad:

$$7x + 3 \leqslant 10$$
$$x \in \mathbb{N}$$

El número 0,
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- Sí
- $0 \in \mathbb{N}$
  y
  $7(0) + 3 \leqslant 10$
  $0 + 3 \leqslant 10$
  $3 \leqslant 10$
  ▲
  PCV

40

$$7x + 3 \leqslant 10$$
$$x \in \mathbb{N}$$

El número 1
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- Sí
- $1 \in \mathbb{N}$
  y
  $7(1) + 3 \leqslant 10$
  $7 + 3 \leqslant 10$
  $10 \leqslant 10$
  ▲
  PCV

41

$$7x + 3 \leqslant 10$$
$$x \in \mathbb{N}$$

El número 2
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- No
- $2 \in \mathbb{N}$
  pero:
  $7(2) + 3 \leqslant 10$
  $14 + 3 \leqslant 10$
  $17 \leqslant 10$
  ▲
  PCF

42

$$7x + 3 \leqslant 10 \quad x \in \mathbb{N}$$

Algún número natural
mayor que 2
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

└──────────────────────┘

- No
- a pesar de ser un

número natural,

al ser sustituido
en la desigualdad,
la transforma en
una

proposición cerrada

falsa

43

Observar con atención.

$$7x + 3 \leqslant 10 \quad x \in \mathbb{N}$$

Resumen

0 satisface la desigualdad.
1 satisface la desigualdad.
2 no satisface la desigualdad.
cualquier número natural mayor que 2
no satisface la desigualdad.
el conjunto solución de la desigualdad
tiene └──────┘ elementos.

2

44

$$7x + 3 \leqslant 10 \quad x \in \mathbb{N}$$

Simbólicamente:

$$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 7x + 3 \leqslant 10\} = \{0, 1\}$$

45

Otra desigualdad:

$$3(x + 3) < 12 \quad x \in \mathbb{N}$$

-1 ¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

No

$-1 \notin \mathbb{N}$

46

$$3(x + 3) < 12 \quad x \in \mathbb{N}$$

0 ¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- Sí
- $0 \in \mathbb{N}$
  y
  $3(0 + 3) < 12$
  $9 < 12$
  ▲
  PCV

47

$$3(x + 3) < 12 \quad x \in \mathbb{N}$$

1 ¿Satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

- No
- $1 \in \mathbb{N}$
  pero:
  $3(1 + 3) < 12$
  $3 \times 4 < 12$
  $12 < 12$
  ▲
  PCF

48

$$3(x + 3) < 12 \quad x \in \mathbb{N}$$

Algún número natural mayor que 1 ¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

[ ]

- No
- aunque sea un

  número natural

  al ser sustituido en la desigualdad, origina una

  proposición cerrada falsa.

49

$$3(x + 3) < 12 \quad x \in \mathbb{N}$$

Resumen

0 satisface la desigualdad.

1 no satisface la desigualdad.

Cualquier número natural mayor que 1 no satisface la desigualdad.

El conjunto solución de la desigualdad tiene [ ] elementos.
¿cuántos?

un

50

$$3(x + 3) < 12 \quad x \in \mathbb{N}$$

Conjunto solución

por comprensión: por extensión:

[ ] = [ ]

$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3(x + 3) < 12\} = \{0\}$

51

Una desigualdad más.

$$5x + 4 \leqslant 1 \qquad x \in \mathbb{N}$$

0 ¿satisface la desigualdad?

Sí/No

porque

[ ]

- No
- $0 \in \mathbb{N}$
  pero:
  $5(0) + 4 \leqslant 1$
  $0 + 4 \leqslant 1$
  $4 \leqslant 1$
  ▲
  PCF

52

Atención.

$$5x + 4 \leqslant 1 \qquad x \in \mathbb{N}$$

Algún otro número natural,
¿satisface la desigualdad?

Sí/No

No

53

$$5x + 4 \leqslant 1 \qquad x \in \mathbb{N}$$

Conjunto solución

por comprensión: por extensión:

[ ] = [ ]

$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 5x + 4 \leqslant 1\} = \phi$

54

Podemos
llegar a la siguiente conclusión
en relación con
el número de elementos
que puede tener el
conjunto solución
de una
desigualdad de primer grado
con una indeterminada:

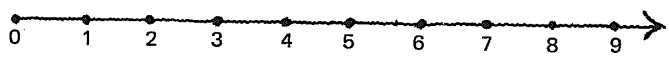
Respuesta
en el
cuadro siguiente

El conjunto solución
de una desigualdad
de primer grado
con una indeterminada
puede tener:

- **cero** elementos (ϕ)
- un **número finito** de elementos
- un **número infinito** de elementos

55

Ésta es la representación gráfica de $\mathbb{N}$:

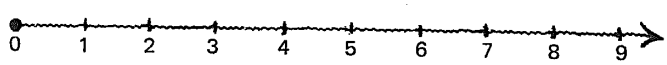


Hemos encontrado que
el conjunto solución de la desigualdad

$$3(x + 3) < 12 \quad x \in \mathbb{N}$$

es $S = \{0\}$

y lo representaremos así en la gráfica de $\mathbb{N}$:



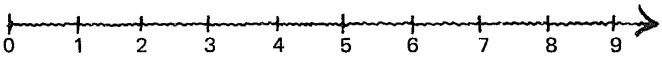
56

El conjunto solución de la desigualdad

$$7x + 3 \leqslant 10 \qquad x \in \mathbb{N}$$

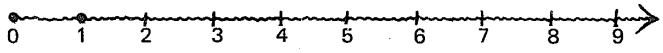
es $S = \{0, 1\}$

y en forma similar lo podemos representar así en la gráfica de $\mathbb{N}$



Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{0, 1\}$.



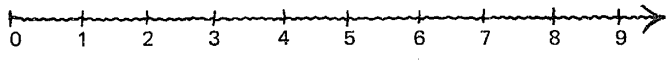
57

El conjunto solución de la desigualdad

$$3x + 7 > 10 \qquad x \in \mathbb{N}$$

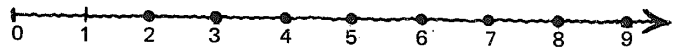
es $\{x/x \in \mathbb{N} \wedge x > 1\}$

Completar la gráfica:



Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x > 1\}$.

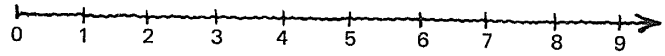


58

Un cierto conjunto solución es

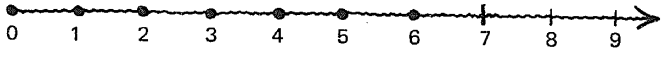
$$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 6\}$$

Completar la representación gráfica:



Respuesta en el cuadro siguiente

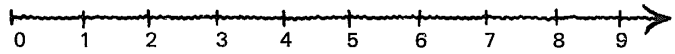
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 6\}$.



59

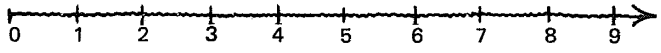
Completar la representación gráfica del conjunto solución

$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 0\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 0\} = \phi$

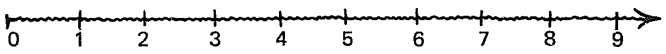


60

Atención.

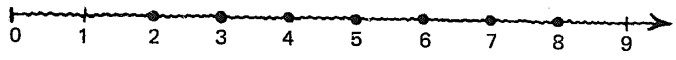
Completar la representación gráfica del conjunto solución

$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \geqslant 2 \wedge x \leqslant 8\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \geqslant 2 \wedge x \leqslant 8\}$.



61

Observar con atención.

La combinación de $x \geqslant 2$ y $x \leqslant 8$

podemos simbolizarla así:

$2 \leqslant x \leqslant 8$

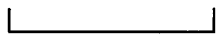
62

La combinación de $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 10$
podemos simbolizarla así:

$0 \leqslant x \leqslant 10$

63

La combinación de $x > 4$ y $x < 20$
podemos simbolizarla así:



$4 < x < 20$

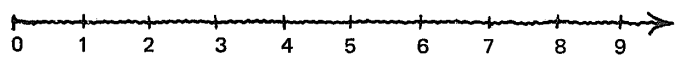
2.4.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

64

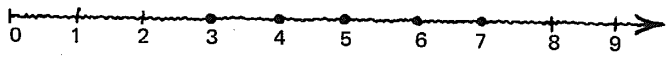
Completar la representación gráfica
del conjunto solución

$$S = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leqslant x \leqslant 7 \}$$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

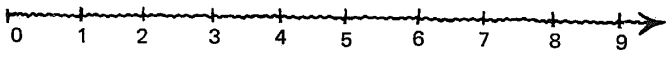
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leqslant x \leqslant 7\}$.



65

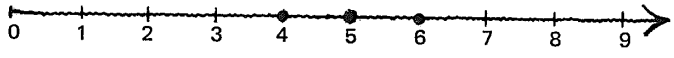
Completar la representación gráfica de

$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 7\}$



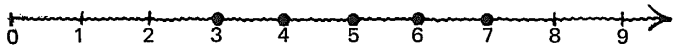
Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 7\}$

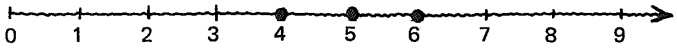


66

Comparar estas dos representaciones.



$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leqslant x \leqslant 7\}$



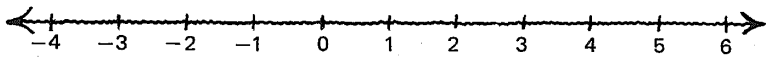
$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 7\}$

67

Completar la representación gráfica de

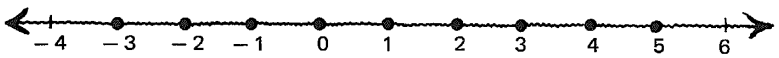
$S = \{ x/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leqslant x \leqslant 5\}$

atención en el dominio



Respuesta en el cuadro siguiente

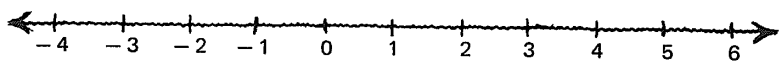
Representación gráfica de $S = \{ x/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leqslant x \leqslant 5\}$.



68

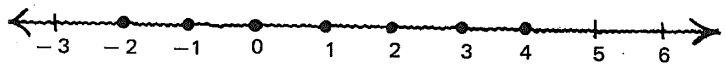
Completar la representación gráfica de

$$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x < 5\}$$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

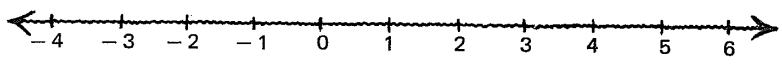
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x < 5\}$.



69

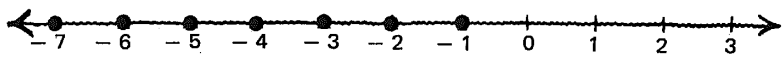
Completar la representación gráfica de

$$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \leqslant -1\}$$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

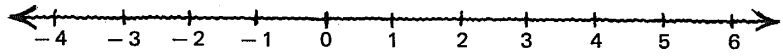
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \leqslant -1\}$.



70

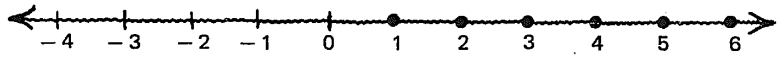
Completar la representación gráfica de

$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$.



2.4.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

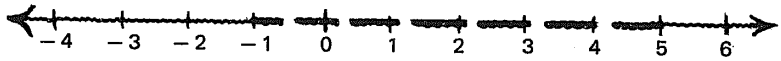
71

Observar con atención.

Convendremos en
representar gráficamente
el conjunto solución

$$S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge -1 < x < 5\}$$

en esta forma:



y el conjunto solución

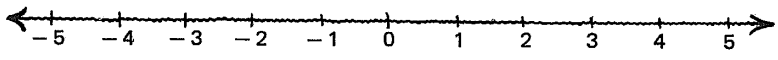
$$S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 5\}$$

así:

72

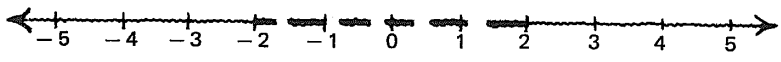
Completar la gráfica
del conjunto solución

$$S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge -2 < x < 2\}$$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge -2 < x < 2\}$.

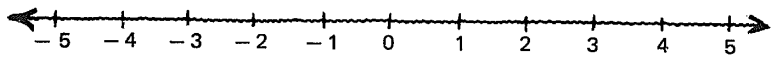


73

Al conjunto solución

$$S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2\}$$

lo representaríamos así:



Completar la gráfica.

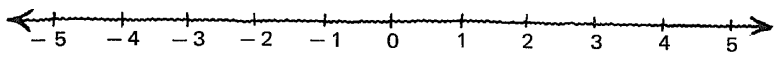
Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2\}$.

74

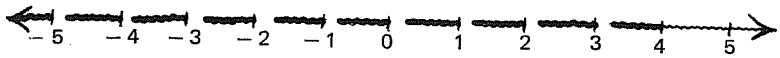
$S = \{ x/x \in \mathbb{Q} \wedge x < 4 \}$

Completar la representación gráfica:



Respuesta
en el
cuadro siguiente

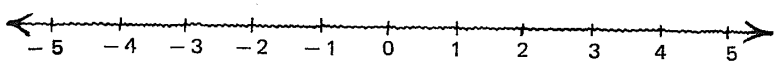
Representación gráfica de $S = \{ x/x \in \mathbb{Q} \wedge x < 4 \}$



75

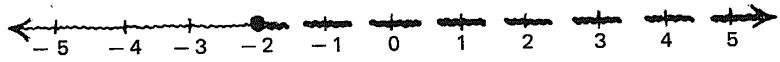
Completar la
representación gráfica de:

$S = \{ x/x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant -2 \}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

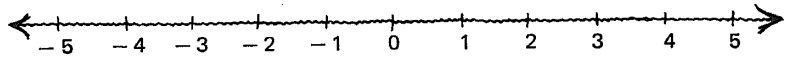
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant -2\}$.



76

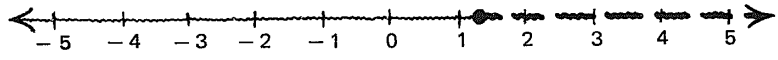
Completar la representación gráfica de:

$S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant 1.25\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant 1.25\}$.



2.4.2.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

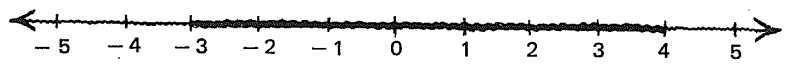
77

Atención.

Ahora convendremos en representar el conjunto solución

$$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge -3 < x < 4\}$$

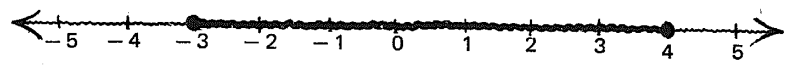
así:



y el conjunto solución

$$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge -3 \leqslant x \leqslant 4\}$$

así:

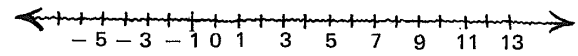


78

Por ejemplo,
al conjunto solución

$$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 10\}$$

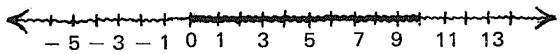
lo representamos
gráficamente así:



Completar la gráfica.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

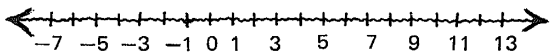
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 10\}$.



79

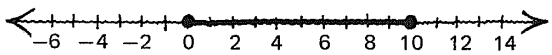
Completar la representación gráfica de:

$$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 10\}$$



Respuesta en el cuadro siguiente

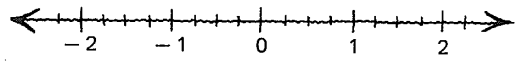
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 10\}$.



80

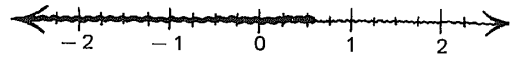
Completar la representación gráfica de:

$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 0.57 \}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

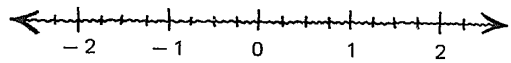
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 0.57\}$.



81

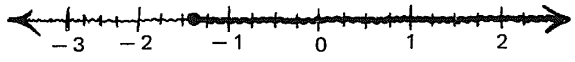
Completar la representación gráfica de:

$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant -1.35 \}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

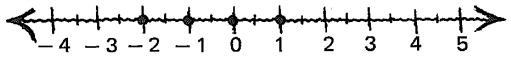
Representación gráfica de $S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant -1.35\}$.



2.4.2.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

82



Ésta es la representación gráfica de

$S = \{$ _____ $\}$

Atención

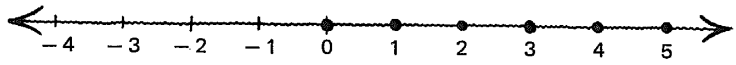
$\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 1\}$

$\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x < 2\}$

ó

$\{-2, -1, 0, 1\}$

83



Ésta es la representación gráfica de:

$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \geqslant 0\}$

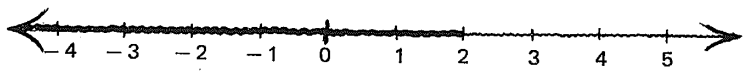
o

$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x > -1\}$

o

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

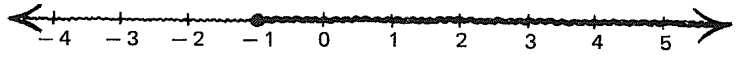
84



Ésta es la gráfica de:

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 2\}$

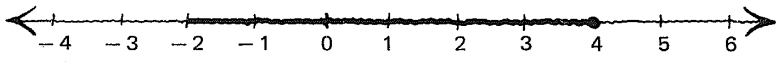
85



Ésta es la gráfica de:

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant -1\}$

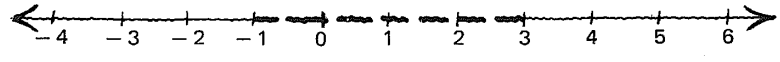
86



Ésta es la gráfica de:

$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge -2 < x \leqslant 4 \}$

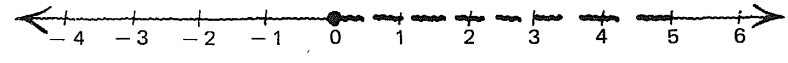
87



De acuerdo con nuestra convención ésta es la gráfica de:

$S = \{ x/x \in \mathbb{Q} \wedge -1 < x < 3 \}$

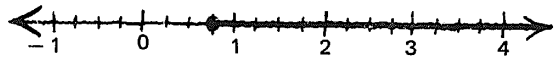
88



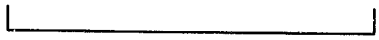
Ésta es la gráfica de:

$S = \{ x/x \in \mathbb{Q} \wedge 0 \leqslant x < 5 \}$

89



Ésta es la gráfica de:



$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant \frac{3}{4} \}$
o
$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0.75 \}$

2.4.2.5

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.4.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* si un número dado satisface o no una desigualdad de primer grado con una indeterminada;
- *simbolizar* el conjunto solución de una desigualdad de primer grado con una indeterminada, por comprensión o por extensión;
- *representar gráficamente* un conjunto solución, dado por comprensión o por extensión;
- *describir* por comprensión o por extensión un conjunto solución representado en forma gráfica.

4.3

Conjunto solución como un intervalo

90

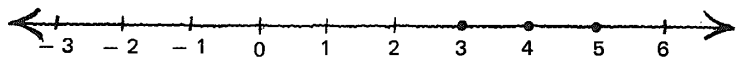
El conjunto solución de

$$2 < x < 6$$

en el dominio $\mathbb{Z}$
es el **subconjunto de** $\mathbb{Z}$ de los números
que satisfacen las dos desigualdades

$x > 2$ y $x < 6$

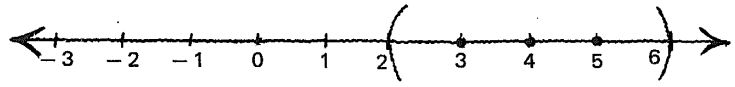
y lo hemos representado gráficamente así;



91

Solución de las desigualdades:

$$2 < x < 6 \quad x \in \mathbb{Z}$$



Simbolicemos este
subconjunto de sustitutos permisibles
para la indeterminada x, en esta forma $(2, 6)$ $x \in \mathbb{Z}$

92

Atención.

Todas estas expresiones representan al

mismo subconjunto

o

intervalo

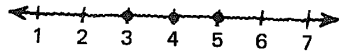
- Representación conjuntista por comprensión:

$\{ x/x \in \mathbb{Z} \wedge 2 < x < 6 \}$

- Representación conjuntista por extensión:

$\{3, 4, 5\}$

- Representación gráfica:



- Representación como intervalo:

$(2, 6)$ $x \in \mathbb{Z}$

93

Atención.

Todas estas expresiones representan al

mismo subconjunto

o

intervalo

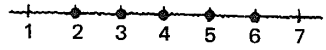
- Representación conjuntista por comprensión:

$\{ x/x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leqslant x \leqslant 6 \}$

- Representación conjuntista por extensión:

$\{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$

- Representación gráfica:



- Representación como intervalo:

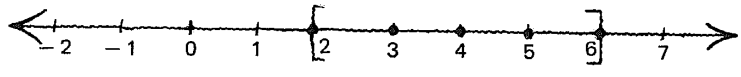
$[2, 6]$ $x \in \mathbb{Z}$

94

Solución de las desigualdades:

$2 \leqslant x \leqslant 6$ $x \in \mathbb{Z}$

Al subconjunto



lo simbolizaremos así:

$[2, 6]$ $x \in \mathbb{Z}$

95

Cuando hablemos del intervalo

$(a, b) \quad a < b$

en el **dominio D,**

nos estaremos refiriendo al

subconjunto de todos los elementos de D
comprendidos entre a y b,
excluyendo a

a y b.

96

Cuando hablemos del intervalo

$[a, b] \quad a \leqslant b$

en el **dominio D,**

nos estaremos refiriendo al

subconjunto de todos los elementos de D
comprendidos entre a y b,
incluyendo a

a y b.

97

Cuando hablemos del intervalo

$(a, b] \quad a < b$

en el **dominio D,**

nos estaremos refiriendo al

subconjunto de todos los elementos de D
comprendidos entre a y b,
excluyendo a $\lfloor\_\_\_\rfloor$ **e incluyendo a** $\lfloor\_\_\_\_\rfloor$.

a b

98

Cuando hablemos del intervalo

$[a, b)$ $a < b$

en el **dominio D,**

nos estaremos refiriendo al

subconjunto de todos los elementos de D comprendidos entre a y b, incluyendo a a y excluyendo b.

99

Una expresión como ésta

(a, b) $a < b$

representará lo que llamaremos

intervalo abierto.

100

Una expresión como ésta

$[a, b]$ $a \leqslant b$

representará un

intervalo cerrado.

101

Éstas serán representaciones de

intervalos mixtos:

(a, b]

[a, b)

$a < b$

cerrado por la izquierda y abierto por la derecha

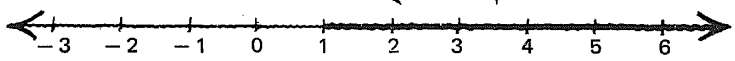
abierto por la izquierda y cerrado por la derecha

102

Observar con atención.

Solución de la desigualdad: $x > 1 \quad x \in \mathbb{R}$

Al subconjunto



lo simbolizaremos así: $(1, +\infty) \quad x \in \mathbb{R}$

Debemos tener en cuenta que $+\infty$

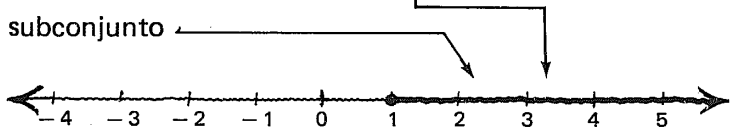
no es un número.

103

Observar con atención.

Solución de la desigualdad: $x \geqslant 1 \quad x \in \mathbb{R}$

Al subconjunto



lo simbolizaremos así: $[1, +\infty) \quad x \in \mathbb{R}$

104

Observar con atención.

Solución de la desigualdad: $x < 1 \quad x \in \mathbb{R}$

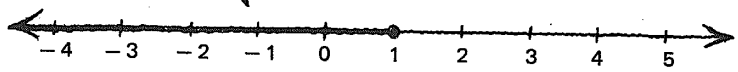
Al subconjunto

lo simbolizaremos así: $(-\infty, 1) \quad x \in \mathbb{R}$

105

Solución de la desigualdad: $x \leqslant 1 \quad x \in \mathbb{R}$

Y
al subconjunto



lo simbolizaríamos así:

$x \in \mathbb{R}$

$(-\infty, 1]$

106

De modo que, cuando hablemos de un intervalo de la forma

$(a, +\infty)$

en el **dominio D,**

nos estaremos refiriendo al subconjunto de todos los elementos de D mayores que a (excluyendo a a) y diremos que es un

intervalo abierto.

107

Un intervalo de la forma

$[a, +\infty)$

en el **dominio D,**
deberemos interpretarlo como el

subconjunto de todos los elementos de D mayores o iguales a a

([_____] a a),
incluyendo/excluyendo

y diremos que es un

intervalo cerrado.

incluyendo

108

Un intervalo como éste

$(-\infty, a)$

en el **dominio D,**
debe ser interpretado como el

subconjunto de todos los elementos de D

([_____] que a)
mayores/menores/iguales

([_____] a a)
incluyendo/excluyendo

menores que

excluyendo

109

Y finalmente,
una expresión como ésta

$(-\infty, a] \quad x \in D$

será una representación simbólica del

[_____]

subconjunto de todos los elementos de D menores o iguales a a (incluyendo a a)

110

Consideremos el conjunto solución de la desigualdad

$x > 5 \quad x \in \mathbb{N}$

por comprensión:

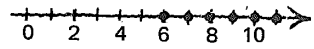
por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x > 5\}$

$S = \{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$



$(5, \infty) \; x \in \mathbb{N}$

111

Conjunto solución de la desigualdad

$x \geqslant 0 \quad x \in \mathbb{Z}$

descrito por comprensión:

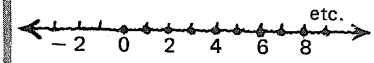
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \geqslant 0 \}$

$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$



$[0, \infty) \; x \in \mathbb{Z}$

112

Conjunto solución de la desigualdad

$x < -1 \quad x \in \mathbb{Q}$

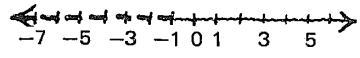
descrito por comprensión:

descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{Q} \wedge x < -1 \}$



$(-\infty, -1) \; x \in \mathbb{Q}$

113

Conjunto solución de la desigualdad

$x \leqslant 2 \quad x \in \mathbb{R}$

descrito por comprensión:

descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leqslant 2\}$

$(-\infty, 2] \; x \in \mathbb{R}$

114

Conjunto solución de las desigualdades

$-1 \leqslant x \leqslant 4 \quad x \in \mathbb{Z}$

descrito por comprensión:

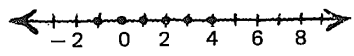
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 4\}$

$S = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$



$[-1, 4] \; x \in \mathbb{Z}$

115

Conjunto solución de las desigualdades

$0 < x < 5 \quad x \in \mathbb{Z}$

descrito por comprensión:

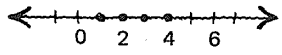
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge 0 < x < 5\}$

$S = \{1, 2, 3, 4\}$



$(0, 5) \; x \in \mathbb{Z}$

116

Conjunto solución de las desigualdades

$-1.5 \leqslant x \leqslant 2.5 \quad x \in \mathbb{Q}$

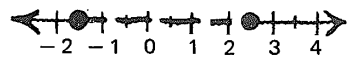
descrito por comprensión:

descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{Q} \wedge -1.5 \leqslant x \leqslant 2.5 \}$



$[-1.5, 2.5] \; x \in \mathbb{Q}$

117

Conjunto solución de las desigualdades

$-10 < x < 50 \quad x \in \mathbb{R}$

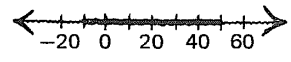
descrito por comprensión:

descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge -10 < x < 50 \}$



$(-10, 50) \; x \in \mathbb{R}$

118

Conjunto solución de las desigualdades

$-2 < x \leqslant 3 \quad x \in \mathbb{Z}$

descrito por comprensión:

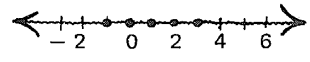
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -2 < x \leqslant 3\}$

$S = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$



$(-2, 3] \; x \in \mathbb{Z}$

119

Conjunto solución de las desigualdades

$1 \leqslant x < 10 \quad x \in \mathbb{R}$

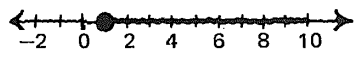
descrito por comprensión:

descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leqslant x < 10 \}$



$[1, 10) \quad x \in \mathbb{R}$

120

Conjunto solución de la desigualdad

$x < 0 \quad x \in \mathbb{N}$

descrito por comprensión:

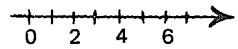
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 0 \}$

$S = \{ \quad \} = \phi$



( ) $x \in \mathbb{N}$

intervalo vacío

121

Conjunto solución de las desigualdades

$x \leqslant 0 \qquad x \in \mathbb{N}$

descrito por comprensión:

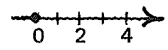
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 0 \}$

$S = \{ 0 \}$



$[0, 0] \quad x \in \mathbb{N}$

122

Conjunto solución de las desigualdades

$2 \leqslant x \leqslant 2 \quad x \in \mathbb{R}$

descrito por comprensión:

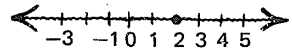
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{I} \wedge 2 \leqslant x \leqslant 2 \}$

$S = \{2\}$



$[2, 2] \quad x \in \mathbb{R}$

123

Conjunto solución de las desigualdades

$2 < x < 2 \quad x \in \mathbb{R}$

descrito por comprensión:

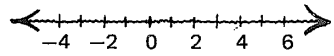
descrito por extensión:

representado gráficamente:

representado como intervalo:

$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 2 \}$

$S = \{ \quad \} = \phi$



( ) $x \in \mathbb{R}$

2.4.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

124

$(5, +\infty)$

es la
representación simbólica
de un

intervalo _____
abierto/cerrado

abierto

125

$[-1, 4]$

es la
representación simbólica
de un

intervalo _____
abierto/cerrado

cerrado

126

$(0, 10]$

intervalo _____

$[-5, 2)$

intervalo _____

- mixto:
  abierto por la izquierda
  y
  cerrado por la derecha
- mixto:
  cerrado por la izquierda
  y
  abierto por la derecha

127

Hemos definido

$$(a, b),\ [a, b)\ \text{y}\ (a, b]$$

para $a < b$,
y

$$[a, b]$$

para $a \leqslant b$.

128

De acuerdo con tales definiciones

$[2, 2] =$ ⌊_____⌋
(enumerar los elementos)

2
es decir
↓
$[a, a] = \{a\}$

129

Ahora
definiremos:

$$(a, a) = (\ ) = \{\ \} = \phi$$

$$[a, a) = (\ ) = \{\ \} = \phi$$

$$(a, a] = (\ ) = \{\ \} = \phi$$

130

Señalar los números que pertenecen al intervalo

$(2, 10)$ $x \in \mathbb{Q}$

1	3	5	3.333...
0	2.0001	9	7 3/4
2	10	8.5	−7.75
3/2	9.9999	$\sqrt{8}$	10.0001

3
2.0001
9.9999
5
9
8.5
3.333...
7 3/4

131

Señalar los números que pertenecen al intervalo

$[1, 2]$ $x \in \mathbb{Z}$

1	$\sqrt{2}$	0.50	1.5
3/2	−1	2.01	2
1.001	0	8/7	$\sqrt{4}$
1.999	$\sqrt{5/2}$	4/2	

1
4/2
2
$\sqrt{4}$

2.4.3.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

132

$(2, 8) = \{$ _____ $\}$
$x \in \mathbb{Z}$ Describir por comprensión

$= \{$ _____ $\}$
Enumerar

$x/x \in \mathbb{Z} \wedge 2 < x < 8$

3, 4, 5, 6, 7

133

$[1, 10] =$ _____
$x \in \mathbb{Z}$ Por comprensión

$=$ _____
Por extensión

$\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leqslant x \leqslant 10\}$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

134

$(3, 7] =$ _____
$x \in D^*$ Por comprensión

$=$ _____
Por extensión

$^*D = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 10\}$

$\{x/x \in D \wedge 3 < x \leqslant 7\}$

4, 5, 6, 7

135

$[-1250, 750) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$x \in \mathcal{R}$ Por comprensión

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge -1250 \leqslant x < 750\}$

136

Señalar la opción correcta.

Las expresiones

$[-1250, 750) \quad x \in \mathcal{R}$

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge -1250 \leqslant x < 750\}$

representan
un conjunto $\underline{\qquad\qquad\qquad}$
finito/infinito

infinito

137

Podemos hablar, entonces,
de

intervalos finitos

y de

intervalos infinitos.

138

Señalar con **F** los intervalos **finitos**,
y con **I** los intervalos **infinitos**.

1.	$(5 + \infty)$	$x \in \mathbb{N}$ ⌊__⌋	7.	$(-10, 50)$	$x \in \mathbb{R}$ ⌊__⌋
2.	$[0, + \infty)$	$x \in \mathbb{Z}$ ⌊__⌋	8.	$(-2, 3)$	$x \in \mathbb{Z}$ ⌊__⌋
3.	$[-1, 4]$	$x \in \mathbb{Z}$ ⌊__⌋	9.	$[0, 0]$	$x \in \mathbb{N}$ ⌊__⌋
4.	$(0, 5)$	$x \in \mathbb{Z}$ ⌊__⌋	10.	$[2, 2]$	$x \in \mathbb{R}$ ⌊__⌋
5.	$[-1.5, 2.5]$	$x \in \mathbb{Q}$ ⌊__⌋	11.	$[-1250, 750)$	$x \in \mathbb{Z}$ ⌊__⌋
6.	$(-10, 50)$	$x \in \mathbb{Z}$ ⌊__⌋	12.	$[-1250, 750)$	$x \in \mathbb{R}$ ⌊__⌋

1. I
2. I
3. F
4. F
5. I
6. F
7. I
8. F
9. F
10. F
11. F
12. I

2.4.3.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.4.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir* como un intervalo, el conjunto solución de una desigualdad de la forma: $x \leqslant a$, o de la conjunción de dos desigualdades de la forma: $a \leqslant x \leqslant b$;
- *representar* el conjunto solución de una desigualdad de la forma: $x \leqslant a$, o de una conjunción de desigualdades:

  — como un conjunto definido por comprensión,
  — como un conjunto definido por extensión,
  — en forma gráfica,
  — como un intervalo.

4.4

Operaciones con intervalos

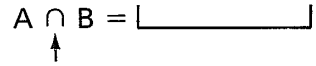
139

Recordemos que

si $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

y $B = \{3, 4, 5, 6\}$

entonces

$A \cap B =$ 

intersección

$\{3, 4\}$

140

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{3, 4\}$

elementos que pertenecen a A y a B

141

En general:

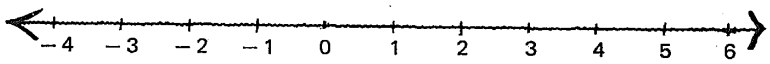
$$A \cap B = \{ x/x \in A \wedge x \in B \}$$

142

Ahora bien, consideremos el intervalo

$(-\infty, 5]$ $x \in \mathbb{Z}$

cuya gráfica es :



(completarla)

Respuesta
en el
cuadro siguiente

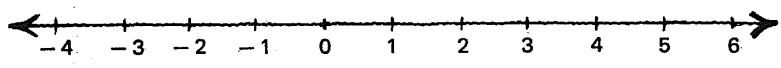
Gráfica de $(-\infty, 5]$ $x \in \mathbb{Z}$

143

Consideremos también el intervalo

$[1, +\infty)\ x \in \mathbb{Z}$

cuya gráfica es:



(completarla)

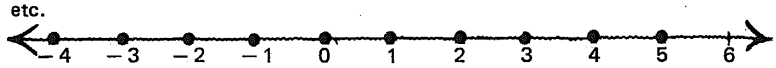
Respuesta
en el
siguiente cuadro

Gráfica de $[1, +\infty)$

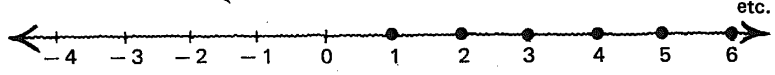
144

Atención.

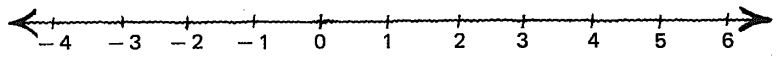
$(-\infty, 5]$



$[1, +\infty)$



$(-\infty, 5] \cap [1, +\infty)$



Completar la última gráfica:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica de $(-\infty, 5] \cap [1, +\infty)$

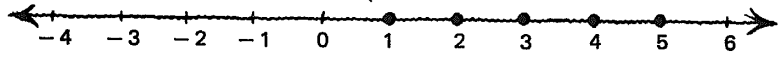
145

Estudiar con atención.

$(-\infty, 5]$ $x \in \mathbb{Z}$

$[1, +\infty)$

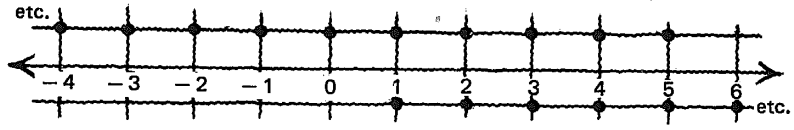
$(-\infty, 5] \cap [1, +\infty)$



146

En forma compacta:

$(-\infty, 5]$



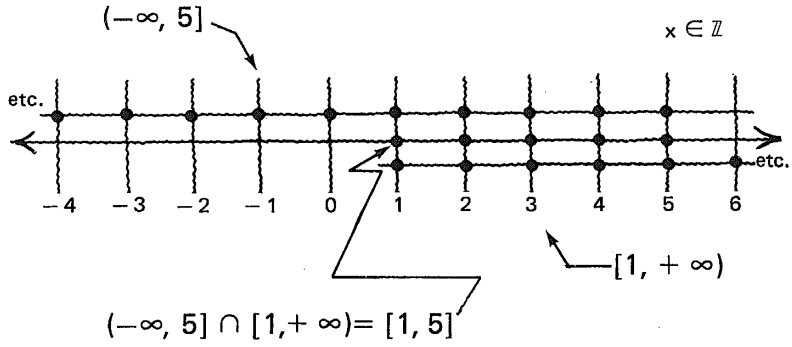
$[1, +\infty)$

$(-\infty, 5] \cap [1, +\infty) =$ intervalo

$[1, 5]$ $x \in \mathbb{Z}$

147

Intersección de intervalos.



$(-\infty, 5] \cap [1, +\infty) = [1, 5]$

148

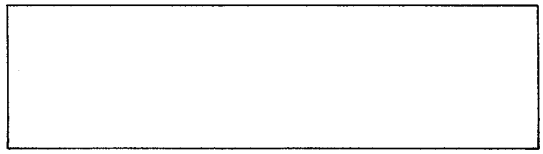
Dos intervalos:

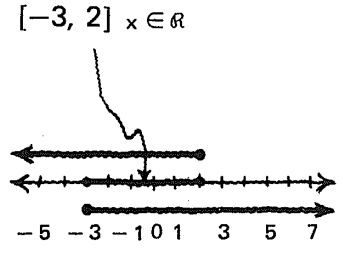
$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, 2] \\ [-3, +\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su intersección:

$(-\infty, 2] \cap [-3, +\infty) =$ ____

Representación gráfica:





149

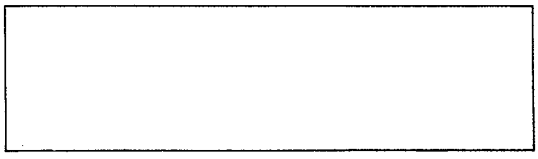
Dos intervalos:

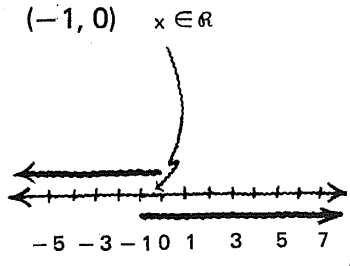
$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, 0) \\ (-1, +\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su intersección:

$(-\infty, 0) \cap (-1, +\infty) =$ ____

Representación gráfica:





150

Dos intervalos

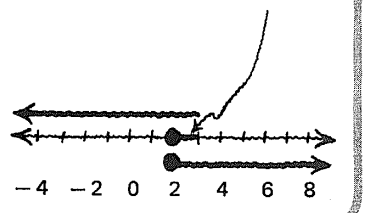
$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, 3)\\ [2,+\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su intersección:

Representación gráfica:

$x \in \mathbb{R}$

$(-\infty, 3) \cap [2,+\infty] = [2, 3)$



151

Dos intervalos:

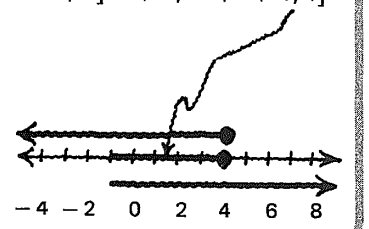
$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, 4]\\ (-1,+\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su intersección:

Representación gráfica:

$x \in \mathbb{R}$

$(-\infty, 4] \cap (-1, +\infty) = (-1, 4]$



152

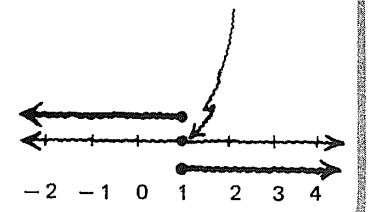
Dos intervalos:

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, 1]\\ [1,+\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su intersección:

Representación gráfica:

$(-\infty, 1] \cap [1, +\infty) = [1, 1]$



153

$[1, 1] = \{$ ____ $\}$

enumerar elementos

1

154

Dos intervalos:

$(-\infty, 1)$

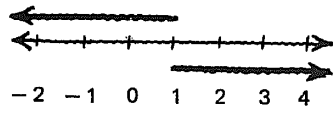
$(1, +\infty)$ $\Big\}$ $x \in \mathbb{R}$

Su intersección:

____

Representación gráfica:

$(-\infty, 1) \cap (1, +\infty) = (1, 1)$



155

$(1, 1) = \{$ ____ $\}$

conjunto definido por extensión

$\{\quad\} = \phi$

156

Dos intervalos

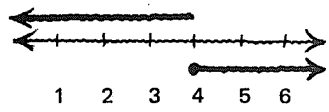
$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, 4) \\ [4,+\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su intersección:

Representación gráfica:

Observar con atención:

$(-\infty, 4) \cap [4,+\infty) = [4, 4)$



157

Describir por extensión o enumeración de sus elementos:

$[4, 4) =$

$\{\quad\} = \phi$

158

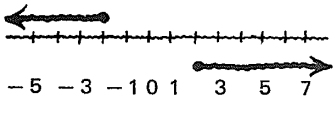
Dos intervalos:

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, -2] \\ [2,+\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su intersección:

Representación gráfica:

- $(-\infty, -2] \cap [2,+\infty) = (\ )$
  $= \{\ \}$
  $= \phi$



159

Dos intervalos:

$(-\infty, 0)$
$(2, \infty)$
$\Big\}\ x \in \mathbb{R}$

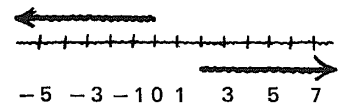
Su intersección:

Representación gráfica:

$(-\infty, 0) \cap (2, +\infty) = (\quad)$

$= \{\quad\}$

$= \phi$



160

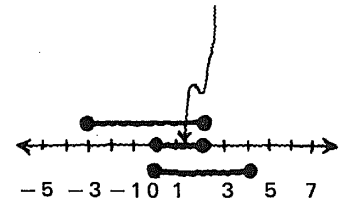
Dos intervalos:

$[-3, 2]$
$[0, 4]$
$\Big\}\ x \in \mathbb{R}$

Su intersección:

Representación gráfica:

$[-3, 2] \cap [0, 4] = [0, 2]$



161

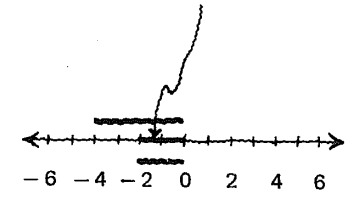
Dos intervalos:

$(-4, 0)$
$(-2, 0)$
$\Big\}\ x \in \mathbb{R}$

Su intersección:

Representación gráfica:

$(-4, 0) \cap (-2, 0) = (-2, 0)$



162

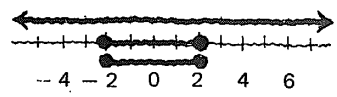
Dos intervalos:

$(-\infty, +\infty)$
$[-2, 2]$
$\Big\}\ x \in \mathcal{R}$

Su intersección:

Representación gráfica:

$(-\infty, +\infty) \cap [-2, 2] = [-2, 2]$



163

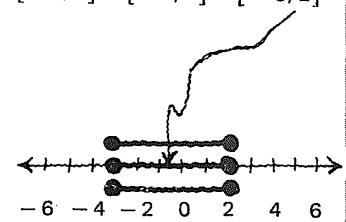
Dos intervalos:

$[-3, 2]$
$[-3, 2]$
$\Big\}\ x \in \mathcal{R}$

Su intersección:

Representación gráfica:

$[-3, 2] \cap [-3, 2] = [-3, 2]$



164

Dos intervalos:

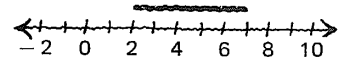
$(2, 7)$
$(\quad)$
$\Big\}\ x \in \mathcal{R}$

intervalo vacío

Su intersección:

Representación gráfica:

$(2, 7) \cap (\quad) = (\quad)$
$= \{\quad\}$
$= \phi$



2.4.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

165

El intervalo

$(-\infty, 5]$ $x \in \mathbb{Z}$

es solución de la desigualdad

$\square$ $\square$

$x \leqslant 5$ $x \in \mathbb{Z}$

166

El intervalo

$[1, +\infty)$ $x \in \mathbb{Z}$

es solución de la desigualdad

$\square$ $\square$

$x \geqslant 1$ $x \in \mathbb{Z}$

167

Estudiar con mucha atención.

- $(-\infty, 5]$ es la solución de $x \leqslant 5$
- $[1,+\infty)$ es la solución de $x \geqslant 1$
- $(-\infty, 5] \cap [1, +\infty) = [1, 5]$

es la solución del sistema:

$x \leqslant 5$ y $x \geqslant 1$

que hemos simbolizado así:

$1 \leqslant x \leqslant 5$

168

- El intervalo $(-\infty, 2]$ es la solución de la desigualdad $x \in \mathbb{R}$ ⌊_____⌋
- El intervalo $[-3, +\infty)$ es la solución de la desigualdad ⌊_____⌋
- $(-\infty, 2] \cap [-3,+\infty) = [-3, 2]$

es la solución de la conjunción de las dos desigualdades, que simbolizamos así:

⌊_____⌋

$x \leqslant 2$

$x \geqslant -3$

$-3 \leqslant x \leqslant 2$

169

$x \in \mathbb{R}$

- $(-\infty, 4]$ es la solución de ⌊_____⌋
- $(-1, +\infty)$ es la solución de ⌊_____⌋
- $(-\infty, 4] \cap (-1,+\infty) =$ ⌊_____⌋

es la solución de ⌊_____⌋ y ⌊_____⌋

o sea, de ⌊_____⌋

$x \leqslant 4$

$x > -1$

$(-1, 4]$

$x \leqslant 4$ $x > -1$

$-1 < x \leqslant 4$

170

- La solución de la desigualdad $x \leqslant 0$ es $\underset{x \in \mathbb{R}}{\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner}$
- La solución de la desigualdad $x > -1$ es $\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner$
- La solución de $x \leqslant 0$ y $x > -1$

  o de $-1 < x \leqslant 0$*

  es $\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner$

*Observemos que $-1 < 0$.

$(-\infty, 0]$

$(-1, +\infty)$

$(-\infty, 0] \cap (-1, +\infty)$
$= (-1, 0]$

171

Observar con mucha atención.

- La solución de $x < 0$ es $\underset{x \in \mathbb{R}}{\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner}$
- La solución de $x > 2$ es $\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner$
- La solución de $x < 0$ y $x > 2$

  que **no** escribimos así: $2 < x < 0$*

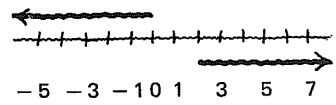
  es $\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner$

*Observemos que en este caso $2 \not< 0$.

$(-\infty, 0)$

$(2, +\infty)$

$(-\infty, 0) \cap (2, +\infty) = (\ \ )$
$= \{\ \ \}$
$= \phi$



2.4.4.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

172

Recordemos que:

si $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

y $B = \{3, 4, 5, 6\}$

entonces

$A \cup B =$ ____

unión

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

173

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

elementos que pertenecen a A o a B

o a ambos conjuntos

174

En general:

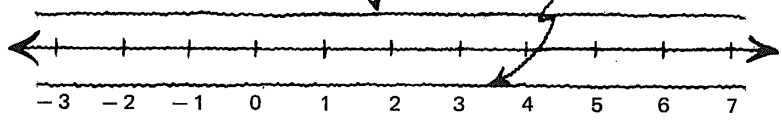
$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

175

Ahora bien,

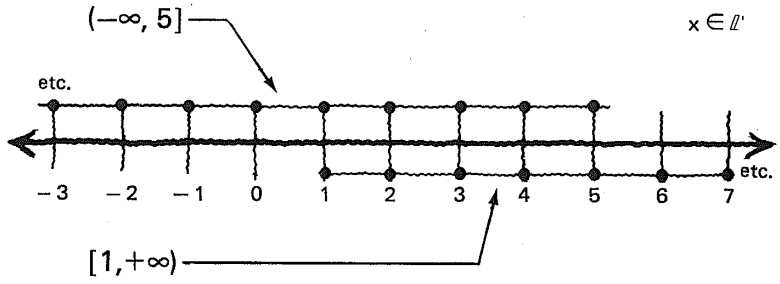
consideremos los intervalos $(-\infty, 5]$, $[1,+\infty)$ $\}\ x \in \mathbb{Z}$

cuyas gráficas son



Completar las gráficas.

Respuesta en el cuadro siguiente



176

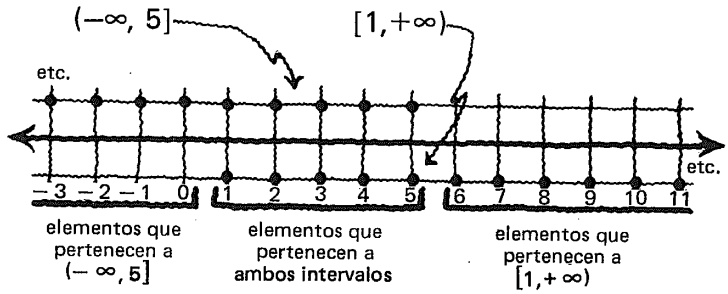
$(-\infty, 5] \cup [1,+\infty) =$ _____ como intervalo

$(-\infty,+\infty)$

177

Atención.

Unión de intervalos: $x \in \mathbb{Z}$



$(-\infty, 5] \cup [1,+\infty) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{Z}$

178

Dos intervalos:

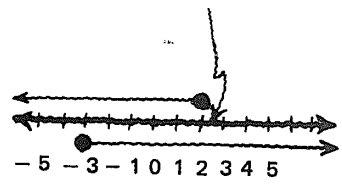
$$\left.\begin{array}{l}(-\infty, 2] \\ [-3,+\infty)\end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

Su unión:

$(-\infty, 2] \cup [-3,+\infty) =$ _____

Gráficamente:

$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$



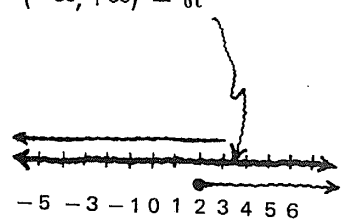
179

$x \in \mathbb{R}$

$(-\infty, 3) \cup [2,+\infty) =$ _____

Representación gráfica:

$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$



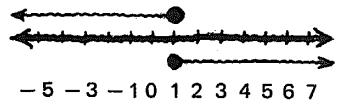
180

$x \in \mathcal{R}$

$(-\infty, 1] \cup [1,+\infty) =$ ____

Representación gráfica:

$(-\infty,+\infty) = \mathcal{R}$



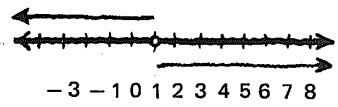
181

$x \in \mathcal{R}$

$(-\infty, 1) \cup (1,+\infty) =$ ____

Representación gráfica:

$(-\infty, 1) \cup (1,+\infty)$
$= \mathcal{R} - \{1\}$



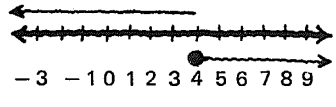
182

$x \in \mathcal{R}$

$(-\infty, 4) \cup [4,+\infty) =$ ____

Representación gráfica:

$(-\infty, 4) \cup [4,+\infty)$
$= (-\infty,+\infty)$
$= \mathcal{R}$



183

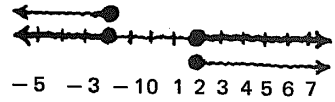
$x \in \mathbb{R}$

$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty) =$ [ ]

Representación gráfica:

Queda así indicado:

$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



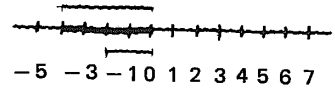
184

$x \in \mathbb{R}$

$(-4, 0) \cup (-2, 0) =$ [ ]

Representación gráfica:

$(-4, 0)$



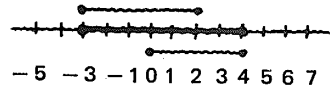
185

$x \in \mathbb{R}$

$[-3, 2] \cup [0, 4] =$ [ ]

Representación gráfica:

$[-3, 4]$



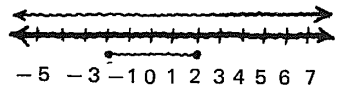
186

$x \in \mathbb{R}$

$(-\infty, +\infty) \cup [-2, 2] =$ ⌊_____⌋

Representación gráfica:

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



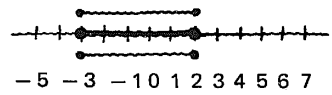
187

$x \in \mathbb{R}$

$[-3, 2] \cup [-3, 2] =$ ⌊_____⌋

Representación gráfica:

$[-3, 2]$



188

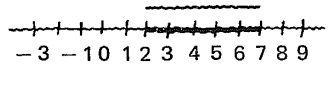
$x \in \mathbb{R}$

$(2, 7) \cup (\quad) =$ ⌊_____⌋

↑ intervalo vacío

Representación gráfica:

$(2, 7)$



2.4.4.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

189

Estudiar con mucha atención.

- El intervalo

  $(-\infty, 5]$ es la solución de la desigualdad $x \leqslant 5$

- El intervalo

  $[1, +\infty)$ es la solución de la desigualdad $x \geqslant 1$

- $(-\infty, 5] \cup [1, +\infty) = (-\infty, +\infty)$

  es la solución de

  $x \leqslant 5 \quad \vee \quad x \geqslant 1$

190

$x \in \mathbb{R}$

- El intervalo $(-\infty, 2]$ es la solución de la desigualdad $\underline{\qquad\qquad}$ $x \leqslant 2$

- El intervalo $[-3, +\infty)$ es la solución de la desigualdad $\underline{\qquad\qquad}$ $x \geqslant -3$

- $(-\infty, 2] \cup [-3, +\infty) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ $(-\infty, +\infty)$

  es la solución de la **disyunción** de las dos desigualdades, es decir de:

  $\underline{\qquad\qquad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\qquad\qquad}$ $x \leqslant 2 \vee x \geqslant -3$

191

Atención.

$x \in \mathbb{R}$

La solución de $x < 2$ es ⌊————————⌋ $(-\infty, 2)$

La solución de $x > 0$ es ⌊————————⌋ $(0, \infty)$

La solución de $x < 2 \wedge x > 0$

es ⌊————————⌋ $(-\infty, 2) \cap (0,+\infty) = (0, 2)$

La solución de $x < 2 \vee x > 0$

es ⌊————————⌋ $(-\infty, 2) \cup (0,+\infty) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

2.4.4.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.4.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la intersección de los conjuntos solución de dos desigualdades de la forma $x \gtrless a$, y trazar la gráfica correspondiente;
- *efectuar* la unión de los conjuntos solución de dos desigualdades de la forma $x \gtrless a$, y trazar la gráfica correspondiente;
- *interpretar* la intersección de dos intervalos como la solución de un "sistema conjuntivo" de dos desigualdades de la forma $x \gtrless a$;
- *interpretar* la unión de dos intervalos como la solución de un "sistema disyuntivo" de dos desigualdades de la forma $x \gtrless a$.

4.5

Solución de desigualdades polinomias

192

Sabemos que

la solución de la desigualdad

$x > a$

es el intervalo $\square$

y que la solución de la desigualdad

$x \geqslant a$

es el intervalo $\square$

$(a,+\infty)$

$[a,+\infty)$

193

La solución de la desigualdad

$x < a$

es el intervalo $\square$

La solución de la desigualdad

$x \leqslant a$

es el intervalo $\square$

$(-\infty, a)$

$(-\infty, a]$

194

También sabemos que

si el conjunto o intervalo solución de la desigualdad

$x > a$ es S_1,

y el conjunto o intervalo solución de la desigualdad

$x < b$ es S_2,

entonces el conjunto o intervalo solución de

$x > a$ y $x < b$

es S_1 ⌊——⌋ S_2

$\cup$ ó $\cap$

$\cap$

195

Además, si $a \leqslant b$:

$x > a$ y $x < b$

puede ser simbolizado en forma compacta así:

⌊————————⌋

$a < x < b$

196

Si el conjunto o intervalo solución de la desigualdad

$x \geqslant a$ es S_1

y el conjunto o intervalo solución de la desigualdad

$x \leqslant b$ es S_2,

entonces el conjunto o intervalo solución de

$x \geqslant a$ o $x \leqslant b$

es S_1 ⌊——⌋ S_2

$\cup$ ó $\cap$

$\cup$

197

Ahora
se requiere
encontrar

el conjunto o intervalo solución

de una desigualdad
como ésta:

$$3x + 4 \geqslant 5x - 2 \qquad x \in \mathcal{R}$$

198

El problema consiste en

transformar

la desigualdad dada
en una
desigualdad equivalente
(con el mismo
conjunto solución)
de la forma:

$$x \gtrless a^*$$

(*) El símbolo $\gtrless$ va a significar: "$>$ ó $<$ ó $\geqslant$ ó $\leqslant$".

199

Estado inicial.
Desigualdad dada: $3x + 4 \geqslant 5x - 2$, $x \in \mathcal{R}$

Transformaciones: *Desigualdades equivalentes*

Estado final. $x \gtrless$ algún número

200

El procedimiento
es similar
al que empleamos
para la solución
de una
ecuación de primer grado
con una indeterminada,
esquematizado
en el
cuadro siguiente.

201

Estado inicial.
Ecuación dada: $3x + 4 = 5x - 2$

$x \in \mathbb{R}$

Transformaciones: *Ecuaciones equivalentes*

Estado final. $x = 3$

202

Hemos estudiado
las
reglas del juego
para la
transformación
de ecuaciones.

Estado inicial. Ecuación dada

Transformaciones: *Ecuaciones equivalentes*

Estado final. $x = a$

203

Recordemos dos reglas del juego para la transformación de ecuaciones.

Propiedad **aditiva**

Si $x = y$

entonces $x + a = y + a$

Propiedad **multiplicativa**

Si $x = y$

entonces $x \cdot a = y \cdot a$

$a \neq 0, a \neq b/0$

204

Ahora estudiemos las siguientes dos **reglas del juego para la transformación de desigualdades.**

Propiedad **aditiva**

Si $x \lessgtr y^*$

entonces $x + a \lessgtr y + a$

Propiedad **multiplicativa**

Si $x \lessgtr y$ y $a > 0^*$

entonces $x \cdot a \lessgtr y \cdot a$

Si a es positiva, no cambia el sentido de la desigualdad.

Si $x \lessgtr y$ y $a < 0^*$

entonces $x \cdot a \gtrless y \cdot a$

Si a es negativa, cambia el sentido de la desigualdad.

*O $x > y$ ó $x \leqslant y$ ó $x \geqslant y$.

205

Veamos cómo funcionan las propiedades anteriores con algunas desigualdades cerradas.

Propiedad aditiva

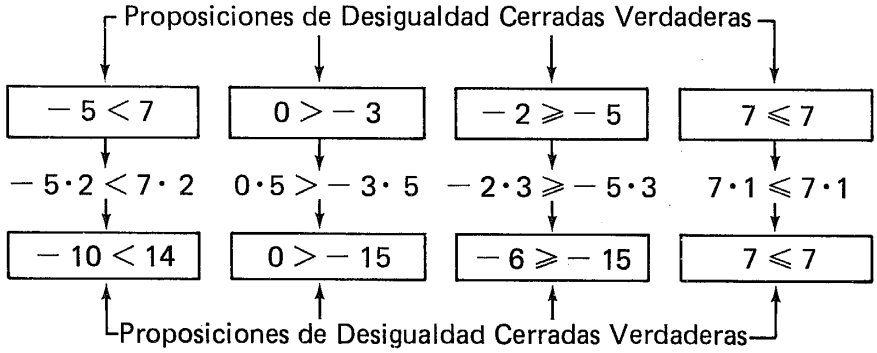
Proposiciones de Desigualdad Cerradas Verdaderas

$3 < 5$	$9 > 6$	$7 \geqslant 5$	$2 \leqslant 2$
$3 + 2 < 5 + 2$	$9 + 5 > 6 + 5$	$7 - 2 \geqslant 5 - 2$	$2 - 5 \leqslant 2 - 5$
$5 < 7$	$14 > 11$	$5 \geqslant 3$	$-3 \leqslant -3$

Proposiciones de Desigualdad Cerradas Verdaderas

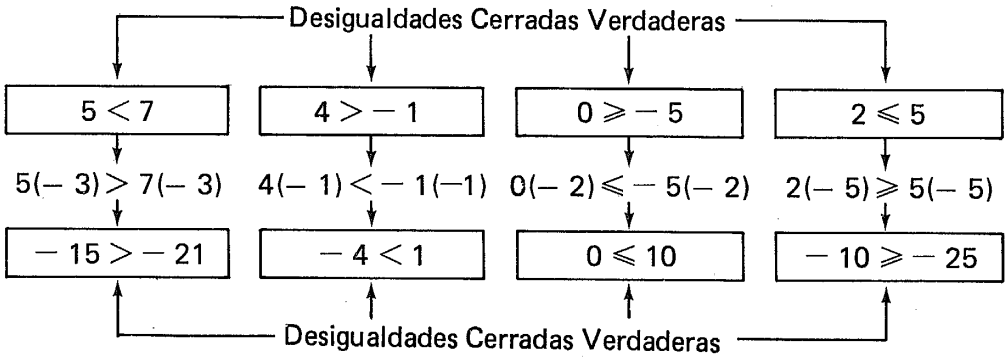
206

Propiedad multiplicativa $(a > 0)$



207

Propiedad multiplicativa $(a < 0)$



208

Debemos recordar que

la "propiedad multiplicativa"
no funciona
cuando $a = 0$,
lo cual
puede ser
fácilmente verificado.

209

La aplicación
de
las propiedades estudiadas
a una desigualdad dada
produce

desigualdades equivalentes

(es decir con el mismo conjunto solución).

210

Consideremos la desigualdad

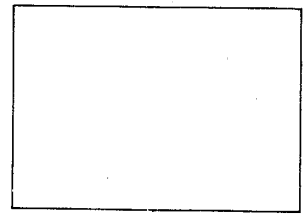
$$x - 4 > 8$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Apliquemos la

propiedad aditiva

para transformar la desigualdad
dada en una desigualdad
equivalente de la forma

$$x \gtrless a$$



$$x - 4 + 4 > 8 + 4$$
$$x - 0 > 8 + 4$$
$$x > 12$$

211

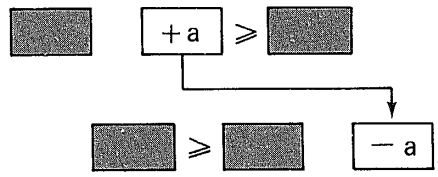
Observar con atención:

$$x - 4 > 8$$

$$x > 8 + 4$$

Sumar + 4 a los dos miembros de la
desigualdad
equivale a
"pasar" el sumando − 4 del primer miembro
al segundo, cambiando su signo.

212



Regla práctica de transposición 1:

"Es posible pasar un sumando de un miembro de una desigualdad al otro, **cambiándole su signo.** El sentido de la desigualdad se conserva."

213

Apliquemos
lo estudiado
a la

determinación del conjunto o intervalo solución

de
desigualdades
de la forma

$x + a \gtrless b.$

214

Resolver la desigualdad

$$x - 3 \geqslant 5$$
$$x \in \mathbb{R}$$

1. Transformar:

$x \geqslant 5 + 3$
$x \geqslant 8$

215

$x - 3 \geqslant 5 \quad x \in \mathbb{R}$

$x \geqslant 8$

2. Dar la solución

- como conjunto definido por comprensión:

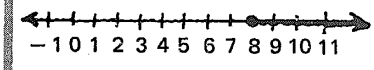
- como intervalo:

- representada gráficamente:

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x - 3 \geqslant 5\}$

$= \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 8\}$

$[8, +\infty)$



216

$x - 3 \geqslant 5 \quad x \in \mathbb{R}$

Desigualdad equivalente:

$x \geqslant 8$

Intervalo solución

$[8, +\infty)$

3. Comprobar por sustitución de elementos dentro del intervalo solución y de su complemento:

Por ejemplo:

$x \in S$

$x = 8 \quad 8 - 3 \geqslant 5$
$5 \geqslant 5$ [PCV]

$x = 9 \quad 9 - 3 \geqslant 5$
$6 \geqslant 5$ [PCV]

$x = 100 - 3 \geqslant 5$
$97 \geqslant 5$ [PCV]

$x \in S'$

$x = 7 \quad 7 - 3 \geqslant 5$
$4 \geqslant 5$ [PCF]

$x = 6 \quad 6 - 3 \geqslant 5$
$3 \geqslant 5$ [PCF]

$x = 0 \quad 0 - 3 \geqslant 5$
$-3 \geqslant 5$ [PCF]

217

Resolver la desigualdad

$x + 4 \leqslant -2$
$x \in \mathbb{R}$

1. Transformaciones:

$x \leqslant -2 - 4$

$x \leqslant -6$

218

$x + 4 \leqslant -2 \quad x \in \mathbb{R}$

Desigualdad equivalente:

$x \leqslant -6$

2. Dar la solución

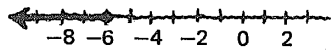
- como conjunto definido por comprensión:

- como intervalo:

- representada gráficamente:

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x + 4 \leqslant -2\}$
$= \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leqslant -6\}$

$(-\infty, -6]$



219

$x + 4 \leqslant -2$
$x \in \mathbb{R}$

$x \leqslant -6$

Intervalo solución:
$(-\infty, -6]$

3. Comprobación:

No se da respuesta.

2.4.5.1

Práctica adicional
de
resolución de desigualdades
de la forma
$x + a \gtrless b \quad a, b \in \mathbb{Z}$,
si
se considera necesario.

220

Se requiere resolver la desigualdad:

$$3x > 12 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Aplicar la *propiedad multiplicativa* para *transformar* la desigualdad dada en otra equivalente, de la forma

$$x \gtrless a$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} > 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x > \frac{12}{3}$$

$$x > 4$$

puesto que

$$\frac{1}{3} > 0$$

221

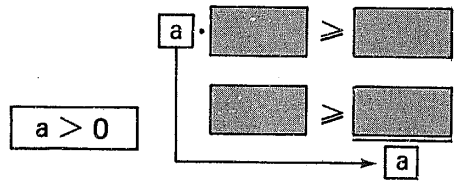
Atención.

$$\textcircled{3}\ x > 12$$

$$x > \frac{12}{\textcircled{3}}$$

Multiplicar ambos miembros por 1/3 equivale a
"pasar el **factor 3** del primer miembro al segundo, como **divisor** "

222



Regla práctica de transposición 2:

"Es posible pasar un **factor positivo** de un miembro a otro de una desigualdad, como **dividendo.**
El sentido de la desigualdad se conserva".

223

Se requiere resolver la desigualdad

$$-5x < 15$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Aplicar la **propiedad multiplicativa** para transformar la desigualdad dada en otra **equivalente** de la forma

$$x \gtrless a$$

$$-5x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) > 15 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$x > \frac{15}{-5}$$

$$x > -3 \quad x \in \mathbb{R}$$

puesto que

$$-\frac{1}{5} < 0$$

224

Atención.

$$-5 \quad x < 15$$
$$x > \frac{15}{-5}$$

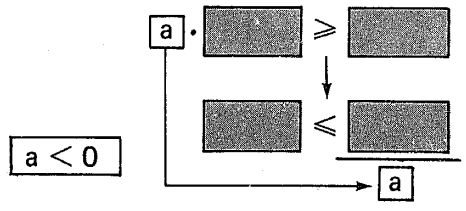
Multiplicar los dos miembros de la desigualdad por $-\frac{1}{5}$ equivale a

"pasar el **factor** -5 del primer miembro al segundo, como **divisor** y cambiar el sentido de la desigualdad".

225

$$\boxed{a < 0}$$

$$\boxed{a} \cdot \boxed{} \geqslant \boxed{}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{} \leqslant \boxed{}$$
$$\boxed{a}$$



Regla práctica de transposición 3:

"Es posible pasar un **factor negativo** de un miembro a otro de una desigualdad, **como dividendo.** El sentido de la desigualdad se invierte."

226

Se requiere resolver la desigualdad

$$3x + 5 \geqslant 10 \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Transformaciones:

Desigualdad equivalente:

$3x \geqslant 10 - 5$

$3x \geqslant 5$

$x \geqslant \frac{5}{3}$

227

$$3x + 5 \geqslant 10 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$x \geqslant 5/3$

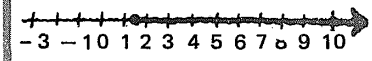
2. Conjunto solución

- representado por compresnión:
- como intervalo:
- representado gráficamente:

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } 3x + 5 \geqslant 10\}$

$= \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } x \geqslant 5/3\}$

$[5/3, +\infty)$



228

Resolver la desigualdad

$$6 - 5x \leqslant 8 \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Transformaciones:

Desigualdad equivalente:

Atención.

$-5x \leqslant 8 - 6$

$-5x \leqslant 2$

$x \geqslant \frac{2}{-5}$

$x \geqslant -\frac{2}{5}$

229

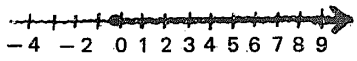
$$6 - 5x \leqslant 8 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$x \geqslant -2/5$$

2. Conjunto solución

- expresado por comprensión: ____
- expresado como intervalo: ____
- expresado gráficamente:

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 6-5x \leqslant 8\}$
$= \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant -2/5\}$
$[-\frac{2}{5}, +\infty)$



230

$$6 - 5x \leqslant 8 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Desigualdad equivalente:

$$x \geqslant -2/5$$

Conjunto solución:

$$[-2/5, +\infty)$$

3. Comprobación:

No se da respuesta.

2.4.5.2

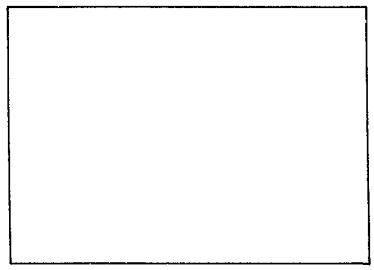
Práctica adicional
de
resolución de desigualdades de la forma
$ax + b \gtrless c$, con $a, b, c, \in \mathbb{Z}$
si
se considera necesario.

231

Resolver:

$$3 + 2x < 4 + 5x \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Transformar:



$$2x - 5x < 4 - 3$$
$$-3x < 1$$
$$x > \frac{1}{-3}$$
$$x > -\frac{1}{3}$$

232

$$3 + 2x < 4 + 5x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Desigualdad equivalente:

$$x > -\frac{1}{3}$$

2. Dar el conjunto solución

- por comprensión: ⌊_____⌋
- como intervalo: ⌊_____⌋
- gráficamente: ⌊_____⌋

$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge 3 + 2x < 4 + 5x \}$

$= \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x > -\frac{1}{3} \}$

$\left(-\frac{1}{3}, +\infty \right)$

2.4.5.3

Práctica adicional
de
resolución de desigualdades
de la forma
$ax + b \gtrless cx + d$ con $a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$
si
se considera necesario.

233

Se requiere resolver:

$$\frac{x}{4} > 5 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Aplicar la **propiedad multiplicativa** para **transformar** la desigualdad dada en otra **equivalente** de la forma:

$$x \gtrless a.$$

$$\frac{x}{4} \cdot 4 > 5 \cdot 4$$

$$x > 5 \cdot 4$$

$$x > 20 \qquad x \in \mathbb{R}$$

puesto que

$$4 > 0$$

234

Observar con atención.

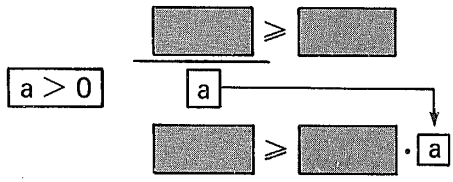
$$\frac{x}{④} > 5$$

$$x > 5 \cdot ④$$

Multiplicar los dos miembros de la desigualdad por 4 equivale a

"**pasar** el **divisor 4** del primero al segundo miembro como **factor.**"

235



Regla práctica de transposición 4:

"Es posible **pasar** un **divisor positivo** de uno a otro miembro de una desigualdad, **como factor.**
El sentido de la desigualdad **se conserva.**"

236

Intentemos resolver

$$\frac{x}{-3} \leqslant 4 \quad x \in \mathbb{R}$$

Multiplicar los dos miembros
de la desigualdad
por un cierto número
para **transformarla** en una
desigualdad equivalente
de la forma

$x \gtrless a.$

$$\frac{x}{-3}(-3) \geqslant 4 \cdot (-3)$$

$$x \geqslant 4\,(-3)$$

$$x \geqslant -12$$

puesto que

$$-3 < 0$$

237

Observar con atención.

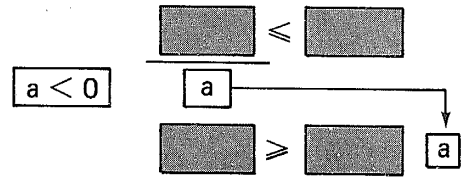
$$\frac{x}{-3} \leqslant 4$$

$$x \geqslant 4 \cdot (-3)$$

Multiplicar los dos miembros de la desigualdad
por -3 equivale a

"**pasar** el **divisor** (-3) del primero al segundo
miembro, **como factor,** e invertir
el sentido de la desigualdad."

238



Regla práctica de transposición 5:

"Es posible **pasar** un divisor **negativo**
de un miembro a otro de una desigualdad,
como factor.
El **sentido** de la desigualdad **se invierte.**"

239

Resolver:

$$\frac{x}{3} + 4 \geqslant x - 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Transformaciones:

$$\frac{x}{3} - x \geqslant -2 - 4$$

$$\frac{x}{3} - x \geqslant -6$$

$$\frac{x - 3x}{3} \geqslant -6$$

$$x - 3x \geqslant -6 \cdot 3$$

$$-2x \geqslant -18$$

$$x \leqslant \frac{-18}{-2}$$

$$x \leqslant 9 \quad \in \mathbb{R}$$

240

$$\frac{x}{3} + 4 \geqslant x - 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$x \leqslant 9$$

2. Dar el conjunto solución

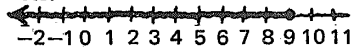
- por comprensión: _____
- como intervalo: _____
- en forma gráfica:

$$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge \frac{x}{3} + 4 \geqslant x - 2\}$$

$$= \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leqslant 9\}$$

$$(-\infty, 9]$$

etc.



241

$$\frac{x}{3} + 4 \geqslant x - 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$x \leqslant 9$$

$$(-\infty, 9]$$

3. Comprobación

No se da respuesta.

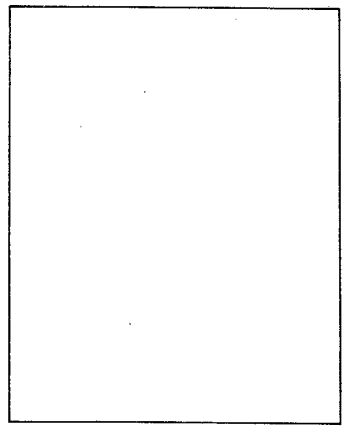
242

Resolver:

$$\frac{x}{4} < \frac{x}{2} + 5$$

$x \in \mathbb{R}$

1. Transformaciones:



$$\frac{x}{4} - \frac{x}{2} < 5$$

$$\frac{x - 2x}{4} < 5$$

$$x - 2x < 5 \cdot 4$$

$$x - 2x < 20$$

$$-x < 20$$

$$x > -20$$

2.4.5.4

Práctica adicional
de
resolución de desigualdades
de la forma
$ax + b \gtrless cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,
si
se considera necesario.

2.4.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* desigualdades de la forma
  $ax + b \gtrless cx + d$, con $a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$;
  escribir la solución como conjunto definido
  por comprensión, como intervalo o en forma gráfica,
  y comprobar el resultado por sustitución de
  elementos dentro del intervalo solución o de su
  complemento;

- *resolver* desigualdades de la forma
  $ax + b \gtrless cx + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

4.6

Solución de desigualdades con expresiones racionales

243

Se requiere resolver

$$\frac{3x + 4}{x - 3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathcal{R}^*$$

Recordemos, en primer lugar,
que la expresión racional

$$\frac{3x + 4}{x - 3}$$ no se define

para todos los valores de $x \in \mathcal{R}$.

(*) Dominio provisional.

244

Atención.

La expresión racional

$$\frac{3x + 4}{x - 3}$$ no se define

si $x - 3 = 0$

o si $\boxed{x = 3}$

El **dominio** queda **restringido a:**

$\boxed{\mathcal{R} - \{3\}}$ o $\boxed{\mathcal{R} \wedge x \neq 3}$

245

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$$

Sabemos que
la primera transformación requerida consiste en eliminar
el denominador del primer miembro;
esto lo logramos multiplicando ambos miembros por $\boxed{x-3}$,
pero surge la duda:

¿ $x-3$ es positivo o negativo?

Es decir:

¿$\boxed{x-3>0}$ ó $\boxed{x-3<0}$?

246

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$$

No podemos saber si $x-3$ es positivo o negativo,
es decir, no sabemos si $x-3>0$ ó $x-3<0$
porque x es **un número indeterminado.**

Si, por ejemplo,

$x=5$ entonces $x-3 \underset{>\text{ ó }<}{\underline{\qquad\qquad}} 0$ $>$

En cambio, si

$x=1$ entonces $x-3 \underset{>\text{ ó }<}{\underline{\qquad\qquad}} 0$ $<$

247

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$$

Si, por ejemplo,

$x=5$ entonces $x-3>0$

En cambio, si,

$x=1$ entonces $x-3<0$

Como consecuencia,
debemos considerar las dos posibilidades:

$\boxed{x-3>0}$ ó $\boxed{x-3<0^*}$

(*) Descartemos la tercera posibilidad: $x-3=0$, porque sabemos que, en este caso, $x=3$, elemento que está excluido del dominio.

248

Dispongamos las cosas en la forma siguiente:

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$$

Caso 1 → $\boxed{x-3>0}$ ó $\boxed{x-3<0}$ ← **Caso 2**

Desigualdad equivalente: x ⌊_⌋ ⌊_⌋

$x > 3$

249

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$$

Caso 1 → $x-3>0$ ó $x-3<0$ ← **Caso 2**

$\boxed{x>3}$

Aplicando la **propiedad multiplicativa** para eliminar el denominador del primer miembro de la desigualdad original:

⌊_____⌋

$3x + 4 \geqslant 5\,(x-3)$

250

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$$

Caso 1 → $\boxed{x-3>0}$ ó $\boxed{x-3<0}$ ← **Caso 2**

$\boxed{x>3}$

$3x + 4 \geqslant 5(x-3)$

Efectuando el producto indicado en el segundo miembro:

⌊_____⌋

$3x + 4 \geqslant 5x - 15$

251

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1 → $\boxed{x-3>0}$ ó $\boxed{x-3<0}$ ← **Caso 2**

$\boxed{x>3}$

$3x + 4 \geqslant 5(x-3)$

$3x + 4 \geqslant 5x - 15$

Transformando la desigualdad resultante en otra equivalente de la forma $x \leqslant a$

$3x - 5x \geqslant -15 - 4$

$-2x \geqslant -19$

$x \leqslant \dfrac{-19}{-2}$

$x \leqslant \dfrac{19}{2}$

252

Observemos con atención lo que hemos hecho hasta aquí:

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1 **Caso 2**

$\boxed{x-3>0}$ ó $\boxed{x-3<0}$

$\boxed{x>3}$

$3x + 4 \geqslant 5(x-3)$

$3x + 4 \geqslant 5x - 15$

$3x - 5x \geqslant -15 - 4$

$-2x \geqslant -19$

$x \leqslant \dfrac{-19}{-2}$

$x \leqslant \dfrac{19}{2}$

253

Atención.

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$$

Caso 1 $\boxed{x-3>0}$ → $\boxed{x>3}$

$3x+4 \geqslant 5(x-3)$ $\boxed{x \leqslant 19/2}$

ó

Caso 2 $\boxed{x-3<0}$

Ⓨ

El conjunto solución para el caso 1 deberá contener todos los elementos de $R - 3$ que satisfagan a

$\boxed{x>3}$ y $\boxed{x \leqslant 19/2}$

254

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \quad x \in \mathbb{R}-\{3\}$$

Caso 1 $\boxed{x-3>0}$ → $\boxed{x>3}$

$3x+4 \geqslant 5(x-3)$ $\boxed{x \leqslant 19/2}$

ó

Caso 2 $\boxed{x-3<0}$

Ⓨ

Sea S_a el intervalo solución de $x>3$ y S_b el de $x \leqslant 19/2$.

$S_a =$ ⌊_____⌋

$S_b =$ ⌊_____⌋

(expresados como intervalos)

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2)$

255

$$\boxed{\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5} \quad x \in \mathbb{R}-\{3\}$$

Caso 1 $\boxed{x-3>0}$ → $\boxed{x>3}$

$3x+4 \geqslant 5(x-3)$ $\boxed{x \leqslant 19/2}$

ó

Caso 2 $\boxed{x-3<0}$

Ⓨ

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$

Sea S_1 el intervalo solución para el caso 1.

$S_1 =$ ⌊_____⌋

$S_a \cap S_b$
$= (3, +\infty) \cap (-\infty, 19/2]$
$= (3, 19/2]$

256

Así hemos encontrado el conjunto solución para la posibilidad de que $x - 3$ sea positivo:

$$\frac{3x + 4}{x - 3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1 $\boxed{x - 3 > 0}$ ó $\boxed{x - 3 < 0}$ **Caso 2**

$3x + 4 \geqslant 5(x - 3)$ ⓐ $\longrightarrow x > 3$, ⓑ $\longrightarrow x \leqslant 19/2$ $\longrightarrow$ (y)

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = S_a \cap S_b = (3, +\infty) \cap (-\infty, 19/2]$

$S_1 = (3, 19/2]$

257

Resolvamos para la posibilidad de que $x - 3$ sea negativo.

Ver cuadro siguiente.

258

$$\boxed{\frac{3x + 4}{x - 3} \geqslant 5} \qquad x \in \mathbb{R} - 3$$

Caso 1 $\longrightarrow \boxed{x - 3 > 0}$ ó $\boxed{x - 3 < 0} \longleftarrow$ **Caso 2**

ⓐ $\longrightarrow \boxed{x > 3}$

$3x + 4 \geqslant 5(x - 3)$ ⓑ $\longrightarrow \boxed{x \leqslant 19/2}$ (y)

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = S_a \cap S_b = (3, 19/2]$

$x < 3$

259

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1

$x - 3 > 0$

ⓐ $x > 3$

$3x+4 \geqslant 5(x-3)$ ⓑ $x \leqslant 19/2$ } ⓨ

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = S_a \cap S_b = (3, 19/2]$

ó

Caso 2

$x - 3 < 0$

$x < 3$ ⓒ

$3x + 4 \_\_\_ 5(x - 3)$ ($\geqslant$ ó $\leqslant$)

Ver cuadro siguiente.

260

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1

$x - 3 > 0$

ⓐ $x > 3$

$3x+4 \geqslant 5(x-3)$ ⓑ $x \leqslant 19/2$ } ⓨ

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = S_a \cap S_b = (3, 19/2]$

ó

Caso 2

$x - 3 < 0$

$x < 3$ ⓒ

ⓓ $3x + 4 \leqslant 5(x - 3)$

Desigualdad equivalente de la forma $x \gtrless a$

Ver cuadro siguiente.

261

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1

$x - 3 > 0$

ⓐ $x > 3$

$3x+4 \geqslant 5(x-3)$ ⓑ $x \leqslant 19/2$ } ⓨ

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = S_a \cap S_b = (3, 19/2]$

ó

Caso 2

$x - 3 > 0$

ⓨ { $x < 3$ ⓒ

$x \geqslant 19/2$ ⓓ $3x + 4 \leqslant 5(x - 3)$

$S_c = \_\_\_\_\_$

$S_d = \_\_\_\_\_$

Ver cuadro siguiente.

262

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1

$x - 3 > 0$

ⓐ $x > 3$

$3x + 4 \geqslant 5(x - 3)$ ⓑ $x \leqslant 19/2$

$Sa = (3, +\infty)$

$Sb = (-\infty, 19/2$

$S_1 = Sa \cap Sb = (3, 19/2]$

ó

Caso 2

$x - 3 < 0$

ⓒ $x < 3$

ⓓ $x \geqslant 19/2$ $\quad 3x + 4 \leqslant 5(x - 3)$

$Sc = (-\infty, 3)$

$Sd = [19/2, +\infty)$

$S_2 =$ _____

Ver cuadro siguiente.

263

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1

$x - 3 > 0$

ⓐ $x > 3$

$3x + 4 \geqslant 5(x - 3)$ ⓑ $x \leqslant 19/2$

$Sa = (3, +\infty)$

$Sb = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = Sa \cap Sb = (3, 19/2]$

ó

Caso 2

$x - 3 < 0$

ⓒ $x < 3$

ⓓ $x \geqslant 19/2$ $\quad 3x + 4 \leqslant 5(x - 3)$

$Sc = (-\infty, 3)$

$Sd = [19/2, +\infty)$

$S_2 = Sc \cap Sd = (\ )$

264

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1

$x - 3 > 0$

ⓐ $x > 3$

$3x + 4 \geqslant 5(x - 3)$ ⓑ $x \leqslant 19/2$

$Sa = (3, +\infty)$

$Sb = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = Sa \cap Sb = (3, 19/2]$

ó

Caso 2

$x - 3 < 0$

ⓒ $x < 3$

ⓓ $x \geqslant 19/2$ $\quad 3x + 4 \leqslant 5(x - 3)$

$Sc = (-\infty, 3)$

$Sd = [19/2, +\infty)$

$S_2 = Sc \cap Sd = (\ )$

El intervalo solución de la desigualdad dada deberá contener todos los elementos de $\mathbb{R} - \{3\}$ contenidos en S_1 ó en S_2 (o en ambos intervalos), es decir:

$S = S_1$ ____ $S_2 =$ _____

265

$S_a = (3, +\infty)$ $S_c = (-\infty, 3)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$ $S_d = [19/2, +\infty)$

$S_1 = Sa \cap Sb = (3, 19/2]$ $S_2 = Sc \cap Sd = \phi$

$$S = S_1 \cup S_2 = (3, 19/2]$$

266

Hemos obtenido
el conjunto solución de la desigualdad

$$\frac{3x + 4}{x - 3} \geqslant 5 \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3:$$

$S = (3, 19/2] \quad x \in \mathbb{R}$

267

En el cuadro siguiente
se muestra
el procedimiento completo de solución,
incluyendo
una
representación gráfica.

268

Estudiar con mucha atención.

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Caso 1

$x - 3 > 0$

ⓐ $x > 3$

ⓑ $3x + 4 \geqslant 5(x-3)$ → $x \leqslant 19/2$

ⓨ

$S_a = (3, +\infty)$

$S_b = (-\infty, 19/2]$

$S_1 = S_a \cap S_b = (3, 19/2]$

o

Caso 2

$x - 3 < 0$

ⓨ

ⓒ $x < 3$

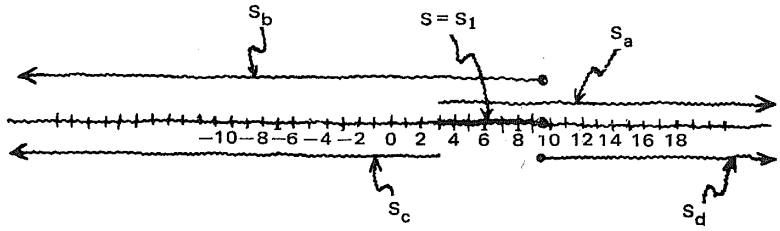
ⓓ $3x + 4 \leqslant 5(x-3)$ → $x \geqslant 19/2$

$S_c = (-\infty, 3)$

$S_d = [19/2, +\infty)$

$S_2 = S_c \cap S_d = \phi$

Representación gráfica $\qquad S = S_1 \cup S_2 = (3, 19/2]$



269

Comprobación:

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3 \qquad S = (3, 19/2]$$

1. Sustitutos pertenecientes al **conjunto o intervalo solución** ($x \in S$):

$x = 4$

$$\frac{3(4)+4}{(4)-3} \geqslant 5$$

$$\frac{12+4}{1} \geqslant 5$$

PCV $\quad 16 \geqslant 5$

$x = 19/2$

$$\frac{3\left(\frac{19}{2}\right)+4}{\left(\frac{19}{2}\right)-3} \geqslant 5$$

$5 \geqslant 5$ PCV

270

Comprobación:

$$\frac{3x+4}{x-3} \geqslant 5 \qquad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3 \qquad S = (3, 19/2]$$

2. Sustitutos pertenecientes al **complemento del conjunto o intervalo solución** ($x \in S'$):

$x = 10$

$$\frac{3(10)+4}{10-3} \geqslant 5$$

$$\frac{34}{7} \geqslant 5 \leftarrow \text{PCF}$$

$x = 2$

$$\frac{3(2)+4}{2-3} \geqslant 5$$

$$\frac{10}{-1} \geqslant 5$$

$$-10 \geqslant 5 \leftarrow \text{PCF}$$

2.4.6.1

Práctica adicional
de
resolución de desigualdades con expresiones racionales,
de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless R(x)$$

en que $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son polinomios enteros.

271

Estamos capacitados para
resolver
el sistema

$$\boxed{60x - (14.50x + 8800) > 0} \quad ①$$

$$x \in \mathbb{N} \qquad \boxed{x \leqslant 1250} \quad ②$$

que hemos establecido
como

modelo

para nuestro
problema de producción.

272

$60x - (14.50x + 8800) > 0$ ① $x \in \mathbb{N}$

Transformaciones:

Desigualdad equivalente de la forma $x \gtrless a$:

$$60x - 14.50x - 8800 > 0$$
$$45.50x - 8800 > 0$$
$$45.50x > 8800$$
$$x > \frac{8800}{45.50}$$
$$x > 193.41$$
$$x \in \mathbb{N}$$

273

$60 - (14.50x + 8800) > 0$ ①

$x \in \mathbb{N}$

$x > 193.41$ ①

$x \leqslant 1250$ ②

Los elementos del conjunto o intervalo solución deberán satisfacer ① y ②, o sea

$193.41 < x \leqslant 1250$

274

$60x - (14.50x + 8800) > 0$ ①

$x \in \mathbb{N}$

$x \leqslant 1250$ ②

$193.41 > x \leqslant 1250$

Puesto que $x \in \mathbb{N}$, podemos escribir:

$194 \leqslant x \leqslant 1250$

Intervalo solución:

[194, 1250]

275

$$\underset{x \in \mathbb{N}}{60x - (14.50x + 8800) > 0} \quad ①$$

$$x \leqslant 1250 \quad ②$$

Rango de operación con utilidad →

$$194 \leqslant x \leqslant 1250$$

$$[194,1250]$$

Si el número de unidades producidas (y vendidas) es menor que 194, operaremos con pérdida.
La organización supuesta no permite producir más de 1250 unidades a la semana.

276

$$\underset{x \in \mathbb{N}}{[194, 1250]}$$

Ésta es la respuesta al problema planteado.

2.4.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* desigualdades de la forma:
  $$\frac{P(x)}{Q(x)} \lesseqgtr R(x)$$
  en que $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son polinomios con coeficientes enteros;
- *expresar* al conjunto solución por comprensión, como intervalo o en forma gráfica; y
- *comprobar* los resultados por sustitución de elementos del conjunto solución o de su complemento.